

VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 31 January 1988 No. 1

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेकनॉलाजी उत्तर प्रदेश तथा
कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च
नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद्, इलाहाबाद

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 31, No. 1, 1988

भौतिकी में इस दशक का आश्चर्यजनक अन्वेषण*

श्रीकृष्ण जोशी
राष्ट्रीय भौतिक प्रयोगशाला
डा० कृष्णन मार्ग, नई दिल्ली

पिछला वर्ष भौतिकी के क्षेत्र में अनेक "सुपर" अन्वेषणों के कारण महत्वपूर्ण है, जैसे,

1. ऊँचे तापमान पर "सुपर" कंडक्टिविटी अर्थात् अतिचालकता,
2. "सुपर" कंडक्टिंग सुपर कोलाइडर तथा सुपरस्ट्रिंग,
3. "सुपर" नौवा 1987a

रीगन प्रशासन ने सुपरकंडक्टिग सुपर कोलाइडर का निर्माण करने की स्वीकृति दे दी है। यह विश्व का सबसे विशाल कण त्वरित्र (particle accelerator) होगा तथा 53 मील परिधि वाली एक सुरंग में स्थित होगा। इस मशीन में विपरीत दिशा में त्वरित प्रोटोन एक दूसरे से कुल मिलाकर 40 ट्रिलियन इलेक्ट्रॉन वोल्ट (4×10^{13} eV) ऊर्जा से टकराएँगे।

24 फरवरी, 1987 की रात्रि को हमारी गैलेक्सी की परिक्रमा करती हुई गैलेक्सी, दीर्घ मैगलैनीय मंदाकिनी (large Megellanic Cloud) में स्थित एक तारे का अन्तिम विस्फोट देखा गया जिसके फलस्वरूप सुपरनोवा 1987a का जन्म हुआ। 24 घन्टे के भीतर इस सुपरनोवा की चमक 1500 गुना बढ़ गई।

किन्तु सम्भवतः इन सबसे अधिक उत्तेजनापूर्ण तथा आश्चर्यजनक उपलब्धि उच्च ताप पर अतिचालकता की खोज रही जिसके लिये वर्ष 1987 का नोबेल पुरस्कार मुलर और बेडनॉर्ज को दिया गया है। यह क्षेत्र स्वयं मेरे अनुसंधान क्षेत्र के बहुत निकट है और मैं इस व्याख्यान के द्वारा आपका परिचय भौतिकी के इसी क्षेत्र—उच्च तापीय अतिचालकता से कराऊँगा।

अतिचालकता की खोज डच वैज्ञानिक कैमरलिंग ओन्स ने सन् 1911 में की थी। उन्होंने पाया कि द्रव हीलियम द्वारा शीतल किये जाने पर 4.2 केल्विन तापमान पर पहुँचते ही पारे का विद्युत-

* 7 जनवरी 1988 को पुणे में अनुसन्धान गोष्ठी के अवसर पर दिया गया अध्यक्षीय भाषण।

प्रतिरोध एकाएक लुप्त हो जाता है किन्तु विद्युत प्रतिरोध शून्य हो जाना ही अतिचालकता का एकमात्र लक्षण नहीं है। अतिचालकता उत्पन्न होते ही अतिचालक पदार्थ में से चुम्बकीय क्षेत्र भी पूरी तरह बाहर हो जाता है। इस गुण को माइस्नर प्रभाव (Meissner effect) या पूर्ण प्रतिचुम्बकत्व (perfect diamagnetism) कहते हैं।

अतिचालकता उत्पन्न होने के भौतिक कारणों को ठीक से समझने में लगभग 50 वर्ष लग गये। अतिचालकता के सम्बन्ध में बार्डीन, कूपर तथा श्रीफर का सिद्धान्त सन् 1957 में सामने आया। इस सिद्धान्त के अनुसार जालकों (lattice) की कम्पनीय विधा (vibrational modes) द्वारा इलेक्ट्रॉनों की पारस्परिक क्रिया के फलस्वरूप इलेक्ट्रॉन युग्मन होता है। निम्न तापमानों पर यह युग्म ऐसे वैद्युत अतितरल के रूप में संघनित हो जाते हैं जिसकी मूल अवस्था (ground state) तथा उत्तेजित अवस्था ऊर्जा अन्तराल द्वारा पृथक हो जाती है।

बर्न्ड टी० मैथियाज ने अतिचालकता सम्बन्धी आधुनिक द्रव्यात्मक भौतिकी की नींव रखी तथा दिखाया कि किस प्रकार क्रिस्टल रसायन और आवर्त सारणी के सृजनात्मक उपयोग द्वारा अधिकाधिक T_c वाले विविध पदार्थ प्राप्त किये जा सकते हैं किन्तु उत्तरोत्तर बढ़ते T_c वाले पदार्थों का पता लगाना एक कठिन कार्य था तथा इस क्षेत्र में प्रगति बहुत धीमी रही। यह इस बात से स्पष्ट है कि पिछले दिनों हुई खोजों से पहले लगभग 75 वर्षों में T_c में केवल 20 केल्विन की ही वृद्धि हुई।

आई० बी० एम० की ज्यूरिख स्थित प्रयोगशाला में बेडनॉर्ज तथा मुलर ने कुछ ऐसे पदार्थों में अतिचालकता की खोज का कार्य किया जिनपर पहले कभी ऐसा अध्ययन नहीं किया गया था। इन अध्ययनों के दौरान जनवरी, 1986 में उन्होंने पाया कि लैंथेनम-बेरियम-कॉपर ऑक्साइड सिरेमिक 30 केल्विन से अधिक तापमान पर ही अतिचालक बन जाता है। इसके पूर्व प्रोफेसर सी० एन० आर० राव तथा उनके सहयोगियों ने भी इस प्रकार के मिश्रित-ऑक्साइडों पर अध्ययन किया था किन्तु यह संयोग ही था कि उन्होंने द्रव हीलियम के ताप क्षेत्र में इन ऑक्साइडों पर अध्ययन नहीं किये। Cu—O पर आधारित यौगिकों में 25 केल्विन से अधिक T_c प्राप्त होने की खोज ने इस दिशा में अनुसन्धान की बाढ़ सी ला दी। इस आश्चर्यजनक खोज के बाद उच्च T_c वाले अनेक नये-नये पदार्थों का पता चला। चू और उनके सहकर्मियों ने सबसे पहले Y—Ba—Cu—O निकाय में T_c का उच्चतम मान (लगभग) 95 केल्विन) प्राप्त किया। इस तापमान पर शीतलन के लिए द्रव नाइट्रोजन का प्रयोग किया जा सकता है (जिसका वायुमण्डलीय दाब पर क्वथनांक 77 केल्विन है)। आगे यहाँ हम केवल निकाय $Y_1 Ba_2 Cu_3 O_{7-\delta}$ की ही चर्चा करेंगे।

उच्चतापीय अतिचालकता में शून्य प्रतिरोध तथा माइस्नर प्रभाव के साथ-साथ स्थायित्व तथा पुनरुत्पादकता की अन्य दो शर्तें भी सम्मिलित हो जाती हैं।

Y—Ba—Cu—O निकाय में 1:2:3 की स्टॉइकियोमीट्री में जरा से भी परिवर्तन से इस निकाय के अतिचालकता सम्बन्धी गुणों पर बहुत प्रभाव पड़ता है। इसका रासायनिक संयोजन

$Y_1 Ba_2 Cu_3 O_{7-\delta}$ है । इस निकाय में अतिचालकता उपस्थित होगी या नहीं, इस सम्बन्ध में ऑक्सीजन की मात्रा की बहुत महत्वपूर्ण भूमिका है । अतिचालकता केवल उसी अवस्था में पाई जाती है जबकि $0<\delta<0.6$. अतिचालक प्रावस्था सदैव विषमलम्बाक्षीय क्रिस्टल रचना में ही पायी जाती है ।

1. उच्चतापीय अतिचालकता

संक्रमण ताप, T_c

$Y_1 Ba_2 Cu_3 O_{7-\delta}$ में T_c का मान लगभग 95 केल्विन है । चित्र 1 द्वारा δ में परिवर्तन के साथ T_c में परिवर्तन को प्रदर्शित किया गया है । $0<\delta<0.2$ के लिये T_c का मान लगभग 90 केल्विन है तथा $\delta>0.2$ के लिये इसका मान घटकर लगभग 60 केल्विन रह जाता है । इस स्थिति में Cu—O शृंखला में ऑक्सीजन की बहुत अल्प मात्रा रह जाती है अतः 60 केल्विन के पास पहुँच कर जो लगभग स्थिरता की स्थिति आ जाती है इसका कारण CuO_2 के तलों को माना जा सकता है ।

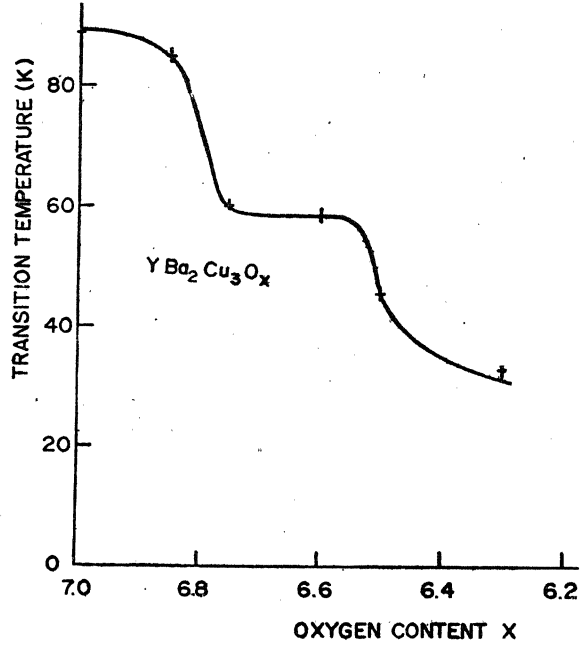
सामान्य अनुप्रयोगों के लिए अतिचालक पदार्थ को $3/4\ T_c$ पर इस्तेमाल करना चाहिये अतः द्रव नाइट्रोजन के तापमान पर कार्य करने के लिए ऐसा पदार्थ होना चाहिए जिसका T_c लगभग 100 केल्विन हो । इस दृष्टि से $Y_1 Ba_2 Cu_3 O_{7-\delta}$ उपयुक्त है ।

ऊपरी क्रांतिक क्षेत्र, Hc_2

टाइप-II अतिचालकों में निम्न क्रांतिक क्षेत्र Hc_1 तथा ऊपरी क्रांतिक क्षेत्र Hc_2 के बीच फ्लक्स घनत्व B शून्य नहीं होता तथा माइस्नर प्रभाव अपूर्ण होता है । एकल क्रिस्टल की मापों में ऊपरी क्रांतिक क्षेत्र काफी विषमदैशिक (anisotropic) होता है । यह देखा गया है कि एकल क्रिस्टलों में c-अक्ष के लम्बवत् चुम्बकीय क्षेत्र की अवस्था में (अर्थात् CuO_2 तलों के समांतर) $Hc_2 \sim 200$ T है तथा B के c-अक्ष के समांतर (अर्थात् $Cu\ O_2$ के लम्बवत्) Hc_2 का मान लगभग 60 टैस्ला होता है । इस प्रकार Y—Ba—Cu—O निकाय अत्यधिक क्रांतिक क्षेत्र प्रदर्शित करता है ।

संसक्तता (coherence) लम्बाई, ξ

संसक्तता लम्बाई वह दूरी है जहाँ युग्मित इलेक्ट्रोनों की कलाएं सहसम्बन्धित रहती हैं । यह लम्बाई कूपर युग्मों के आकार की द्योतक है । साधारणतः सामान्य अतिचालकों में संसक्तता लम्बाई 400 ऐंग्स्ट्रम मात्रक से 16000 ऐंग्स्ट्रम मात्रक के बीच होती है । उच्च T_c वाले $Y_1 Ba_2 Cu_3 O_{7-\delta}$ अतिचालकों के एकल क्रिस्टलों में a—b तल में संसक्तता लम्बाई, ξ_{a-b} केवल 24 ऐंग्स्ट्रम मात्रक होती है जबकि c अक्ष की दिशा में यह लम्बाई, 7 ऐंग्स्ट्रम मात्रक होती है । क्योंकि ξ_c लगभग 7 ऐंग्स्ट्रम मात्रक होती है जो कि तलों के बीच की दूरी (3.9 ऐंग्स्ट्रम मात्रक) से अधिक है, इससे पता चलता है कि इन पदार्थों में अतिचालकता त्रिविम रूप में होती है ।



चित्र 1

क्रांतिक धारा घनत्व, J_c

प्रकाय (bulk) अतिचालकों के विभिन्न अनुप्रयोगों में J_c के स्वीकार्य मानों (लगभग 10^5 एम्पियर से०मी०^2) को प्राप्त करना बहुत महत्वपूर्ण है। अब तक विभिन्न प्रकार के नमूनों में J_c के जो मान प्राप्त किये गये हैं वे इस प्रकार हैं :

1. बहुक्रिस्टलीय प्रकाय नमूने (77 केल्विन पर)
   - (क) 7400 एम्पियर/से०मी०^2 B=0 के लिए
   - (ख) 1000 एम्पियर/से०मी०^2 B=1 टैस्ला
2. एपिटैक्सीय पतली फिल्में (c अक्ष फिल्म की सतह के अभिलम्बवत्)
   - (क) 7×10^5 एम्पियर/से०मी०^2 77 केल्विन पर
   - (ख) 5×10^7 एम्पियर/से०मी०^2 4.2 केल्विन पर
3. अनभिविन्यसित (non-oriented) बहुक्रिस्टलीय पतली फिल्में
   10^4 एम्पियर/से०मी०^2

वाहक संकेन्द्रण तथा अवस्था घनत्व (Carrier Concentration and Density of States)

म्यूऑन प्रचक्रण शिथिलता (spin relaxation) अध्ययनों द्वारा निम्न तापमानों पर वेधन 1300 ऐंग्स्ट्रम मात्रक ज्ञात की गयी है। इससे बी० सी० एस० सिद्धांत के अनुसार से वाहक घनत्व का मान लगभग 8×10^{21}/सि०मी०^{3} प्राप्त होता है। संक्रमण तापमान के निकट विशिष्ट उष्मा से फर्मी सतह पर इलेक्ट्रॉनीय अवस्थाओं का अनुमानतः घनत्व लगभग 3.4 अवस्थाएं/इलेक्ट्रॉन वोल्ट एकक सेल प्राप्त होता है।

ऊर्जा अन्तराल, △

एसी, ससेप्टिबिलिटी, ब्रेक जंक्शन टनलिंग तथा Nb, Mo की पाइंट कॉन्टेक्ट टनलिंग के अध्ययन से पता लगता है कि ऊर्जा अन्तराल का मान लगभग 20 मिलीइलेक्ट्रॉन वोल्ट प्राप्त होता है। परम्परागत दुर्बल युग्मन बी० सी० एस० सिद्धांत के अनुसार

$$\frac{2\Delta}{k_B T_C}\simeq 3.5$$

जहाँ T_c=95 के लिये ऊर्जा अन्तराल △ लगभग 14.3 मिलीइलेक्ट्रॉन वोल्ट है। मापन द्वारा प्राप्त मान हैं :

$$\frac{2\Delta}{T_B T_C}\sim 5 \text{ (ए० सी० ससेप्टिबिलिटी से)}$$

$$\sim 4.8 \text{ (ब्रेक जंक्शन टनलिंग से)}$$

अवरक्त परावर्तन तथा स्कैनिंग टनलिंग सूक्ष्मदर्शिकी से अन्तराल का उपर्युक्त से अधिक मान प्राप्त होता है।

$$\frac{2\Delta}{k_B T_C}\sim 8 \text{ (अवरक्त परावर्तकता से)}$$

$$\sim 11 \text{ (स्कैनिंग टनलिंग सूक्ष्मदर्शिकी से)}$$

संरचना तथा अतिचालकता

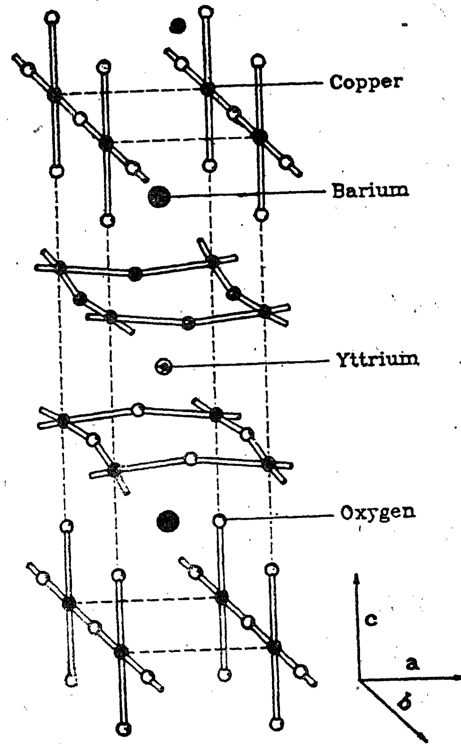
अनेक एकल क्रिस्टल, एक्स किरण तथा न्यूट्रॉन प्रयोगों द्वारा अतिचालक प्रावस्था की क्रिस्टल संरचना ज्ञात की गई है। यह संरचना विषमलम्बाक्षीय है जिसके जालक प्राचल (lattice parameters) इस प्रकार हैं :

a=3.828, b=3.877, c=11.708 ऐंग्स्ट्रम मात्रक

इस संरचना का सम्बन्ध (चित्र 2 के अनुसार) पेरोवस्काइट संरचना (आदि प्रारूप बेरियम टिटेनेट) से जोड़ा जा सकता है। इस संरचना को c अक्ष के लम्बवत् CuO, BaO, Cu O_2, Y, Cu O_2, BaO तथा CuO तलों को एक के ऊपर एक रखकर दर्शाया जा सकता है। b अक्ष के समांतर Cu O की शृंखलाएँ तथा Y के ऊपर और नीचे शिकन पड़े हुए (puckered) Cu O_2 तल इसकी विशेषताएँ हैं। जैसे-जैसे पदार्थ में ऑक्सीजन की कमी होती जाती है (या δ का मान बढ़ता जाता है) वैसे-वैसे शृंखलाओं

में ऑक्सीजन घटती है तथा δ का मान 0.5 से अधिक हो जाने पर द्विसमलम्बाक्षीय (tetragonal) प्रावस्था में संक्रमण हो जाता है जिसमें शृंखलाएँ लुप्त हो जाती हैं और ऑक्सीजन विभिन्न तलों के बीच खाली हुए स्थान में यादृच्छिक रूप से समा जाती हैं। जैसा कि पहले कहा जा चुका है अतिचालकता गुणों पर ऑक्सीजन की मात्रा का बहुत अधिक प्रभाव पड़ता है जो कि सम्भवतः इसका कारण है कि ऑक्सीजन बहुत आसानी से अन्दर-बाहर आ-जा सकती है। विश्वास किया जाता है कि अतिचालकता का गुण Cu O शृंखलाओं द्वारा प्रभावित तलों में निहित है। दुर्लभ मृदाओं (rare earths) द्वारा प्रतिस्थापन (चाहे यह प्रतिस्थापन 90 केल्विन पदार्थ में Y के Gd जैसे चुम्बकीय पदार्थ द्वारा ही क्यों न हो) अतिचालकता पर कोई विशेष प्रभाव नहीं डालता।

ORTHORHOMBIC STRUCTURE OF $YBa_2 Cu_3 O_{7-\delta}$



चित्र 2

अतिचालकता तथा प्रतिलोहचुम्बकत्व का सह-अस्तित्व

यह पाया गया है कि जब $Y_1 Ba_2 Cu_3 O_{7-\delta}$ में Y के स्थान पर Gd को प्रतिस्थापित किया जाता है तो Gd आयनों की व्यवस्था ऐसी होती है कि प्रतिलोहचुम्बकत्व (antiferromagnetism) उत्पन्न हो जाता है। इससे पता चलता है कि अतिचालकता और प्रतिलोहचुम्बकत्व साथ-साथ भी उपस्थित हो सकते हैं।

II. अतिचालकता के विषय मे अभी तक अज्ञात बातें

1. क्रियाविधि

अभी तक उच्च तापीय अतिचालकता की क्रियाविधि के विषय में कोई विशेष जानकारी प्राप्त नहीं हो सकी है। विभिन्न निकायों में अतिचालकता उत्पन्न होने के बारे में विभिन्न मत हैं।

2. विमीयता

अभी तक एक विमा वाली शृंखलाओं, 2 विमाओं वाले $Cu\ O_2$ तलों तथा इन दोनों के पारस्परिक सम्बन्धों को ठीक से नहीं समझा जा सका है और यह नहीं पता चल सका है कि अतिचालकता का स्वरूप एकविमीय है, द्विविमीय है या त्रिविमीय है।

3. Cu की संयोजकता अवस्था

बैंगलोर के प्रोफेसर सी० एन० आर० राव के ग्रुप तथा कुछ अन्य वैज्ञानिकों द्वारा किये गये प्रकाश-इलेक्ट्रॉन स्पेक्ट्रमिकी सम्बन्धी प्रयोगों से Cu^{1+} तथा Cu^{2+} अवस्थाओं का पता चला है किन्तु Cu^{3+} के उपस्थित होने का कोई प्रमाण नहीं मिला है। वैज्ञानिकों का सुझाव है कि Cu^{1+} अवस्था द्वारा O(2p) बैंड में "होल" का होना संभावित है। "होल" का द्वितयन होकर परॉक्साइड की तरह स्पीशीज बन जाती है।



$$2O^{2-} \rightarrow O_2^{2-} + 2e^-$$

4. आइसोटोप प्रभाव

Y—Ba—Cu—O निकाय में ^{16}O के ^{18}O द्वारा विस्थापन से आइसोटोप प्रभाव प्रदर्शित नहीं होता। इस कारण बी० सी० एस० के स्थान पर किसी और सिद्धांत की खोज को बल मिला है। $La_{2-x} Sr_x\ Cu\ O_4$ में आंशिक रूप से आइसोटोप प्रभाव पाया गया है जिससे यह लगता है कि इन अतिचालक ऑक्साइडों के इलेक्ट्रॉन युग्मन की क्रिया में फोनोन भी सम्मिलित है किन्तु साथ ही कुछ अन्य क्रियाओं की उपस्थिति की सम्भावना से भी इंकार नहीं किया जा सकता।

5. अतिचालकता और चुम्बकत्व

यद्यपि $R\ Ba_2\ Cu_3\ O_{7-\delta}$ यौगिकों ($R=Gd, Dy, Er$) में उच्च अतिचालक संक्रमण को प्राथमिकता दी जा रही है किन्तु चुम्बकत्व तथा अतिचालकता का परस्पर संबंध भी कुछ कम रोचक नहीं

है। चुम्बकीय दुर्लभ मृदा के आयनों द्वारा प्रतिस्थापन करने पर भी अतिचालकता संबंधी गुणों पर कोई विशेष प्रभाव नहीं पड़ता। इससे लगता है कि दुर्लभ मृदा आयन के आघूर्ण (moments) तथा चालकता इलेक्ट्रॉनों के बीच विनिमय पारस्परिक क्रिया दुर्बल है।

6. धातु-अधातु संक्रमण तथा अतिचालकता

अतिचालकता के क्षेत्र में इलेक्ट्रॉन सह-संबंध की भूमिका का ठीक से पता नहीं लग सका है। ऑक्सीजन रिक्तता तथा उसके क्रमबद्ध होने या न होने की क्या भूमिका है यह भी स्पष्ट नहीं है। यह भी पता नहीं लगाया जा सका है कि सिरैमिक ऑक्साइडों की कुछ प्रावस्थाओं-विशेषकर उनके दायित्व पर तापीय चक्रण (thermal cycling) किस प्रकार प्रभाव डालता है।

III. अनुप्रयोग

इस क्षेत्र में अभी तक सामान्य अतिचालक पदार्थों के ज्ञात अनुप्रयोगों में उच्च तापीय अतिचालकों का इस्तेमाल विचाराधीन है। उच्च तापीय अतिचालकों का इस्तेमाल करने के लाभ इस प्रकार हैं :—

1. इनमें कम खर्च आता है क्योंकि द्रव हीलियम की अपेक्षा द्रव नाइट्रोजन कहीं सस्ती है।

2. द्रव नाइट्रोजन के तापमान पर इन पदार्थों से बने सहसंबंधकों (interconnects) का सेमीकंडक्टर युक्तियों (डिवाइसों) में उपयोग हो सकता है तथा कमरे के तापमान की अपेक्षा भी इन तापमानों पर वाहकों में अधिक गतिशीलता होती है।

3. अधिकांश स्थानों पर द्रव नाइट्रोजन आसानी से उपलब्ध हो जाती है इसलिए इन पदार्थों से बनी मशीनों को एक स्थान से दूसरे पर ले जाना आसान है जबकि द्रव हीलियम के तापमान पर शीतलन निकाय बहुत बड़े होते हैं। इस कारण द्रव हीलियम सब जगह उपलब्ध नहीं होती।

4. इन पदार्थों की उष्माधारिता अधिक होने के कारण इनसे बनी मशीनें/साधन इन तापमानों पर अधिक स्थाई होते हैं और उष्मा का प्रभाव मशीनों पर व्यक्त नहीं हो पाता।

इन पदार्थों द्वारा साधनों के निर्माण तथा प्रक्रियाओं में सामने आने वाली चुनौतियों का अध्ययन किया जा रहा है। उच्च तापीय अतिचालक पदार्थों का जिन क्षेत्रों में शीघ्र ही उपयोग होने की संभावना है वे इस प्रकार हैं :

(अ) चुम्बकीय शील्डिंग

(आ) सुपरकंडक्टिंग क्वांटम इंटरफियरेंस डिवाइस अर्थात् स्क्विड (SQUID)

(इ) अवरक्त संवेदक

इसके अतिरिक्त कई अन्य ऐसे क्षेत्र हैं जिनमें सम्भवतः इन पदार्थों का कुछ अधिक समय बाद उपयोग हो सकेगा, जैसे :

(1) विद्युत शक्ति का संचार
(2) अतिचालक चुम्बक
(3) ऊर्जा भंडारण के साधन
(4) चिकित्सात्मक चित्रण निकाय
(5) जमीन से ऊपर रहकर चलने वाले वाहन
(6) चुम्बकीय पृथक्कारक तथा अयस्क (ore) शोधन
(7) ऐसे कम्प्यूटर जिनमें
 (i) अर्धचालक–अतिचालक हाइब्रिडों या
 (ii) सक्रिय अतिचालक तत्वों का प्रयोग होता है।

इनमें से अधिकांश साधनों में अतिचालकों का इस्तेमाल पतली फिल्मों के रूप में किया जायेगा। सिंटरित प्रकायित सिरेमिकों की तुलना में पतली फिल्मों में परमाणु कहीं अधिक सघन रूप में व्यवस्थित होते हैं। पतली फिल्में जमाने के लिए इन प्रक्रियाओं का इस्तेमाल किया जाता है :

(1) इलेक्ट्रॉन बीम डिपॉजिशन
(2) एम० बी० ई०
(3) स्पटरिंग
(4) लेजर ऑब्लेशन
(5) आयन बीम डिपॉजिशन
(6) प्लाज्मा स्प्रे डिपॉजिशन

इनमें सामान्यतः Al_2O_3, MgO, ZrO, SiO_2 तथा $SrTiO_3$ के अवस्तरों का प्रयोग किया जाता है।

IV. अन्य चुनौतियाँ तथा भविष्य

1. नये निकाय

उच्चतापीय अतिचालकों की यह उत्तेजनापूर्ण खोज आखिर हमें कहाँ ले जायेगी : नये पदार्थ नई प्रौद्योगिकी, नवीन ज्ञान ? हाँ, सम्भवतः यह सभी। नये-नये पदार्थों की खोज जारी है। यहाँ संरचनात्मक रसायन अतिचालकता के सिद्धांतों की अपेक्षा हमारी सफलता में अधिक सहायक होगा। संभवतः कुछ ऐसे और पदार्थ सामने आयें जिनमें कमरे के तापमान या उससे भी अधिक तापमान पर अतिचालकता प्राप्त हो सके। पदार्थों के विभिन्न संयोजनों, संरचनाओं तथा प्रावस्थाओं से नये उच्च-तापीय अतिचालकों की खोज जारी है।

2. और अधिक उच्च T_c

कई स्थानों से 100 केल्विन से भी अधिक तापमान पर अतिचालकता प्राप्त होने के समाचार मिले हैं किन्तु अभी तक इस विषय में वैज्ञानिक एकमत नहीं हैं। एन० पी० एल० में डा० अनन्त नारलीकर के नेतृत्व में वैज्ञानिकों को प्रतिलोम (inverse) जोसेफ्सन प्रभाव तथा प्रतिरोध में कमी के द्वारा लगभग 300 केल्विन पर $Y_2 Ba Sr Cu_3 O_8$ के बहुप्रावस्था वाले नमूनों में अतिचालकता के संकेत मिले हैं। अन्य कई ग्रुपों द्वारा भी 100 केल्विन से अधिक T_c प्राप्त होने के समाचार मिले हैं।

अस्थाई प्रावस्थाओं में निम्नलिखित स्थानों से 100 केल्विन से अधिक T_c प्राप्त होने के समाचार मिले हैं।

ग्रुप	
जॉर्जिया टेक, (यू० एस० ए०) (एविल)	500 केल्विन
लॉकहीड पेलो एल्टो, (यू० एस० ए०) (चाओ युआन एन हुयांग)	339 केल्विन
मिति, (जापान) (एच० इहारा)	338 केल्विन
मास्को स्टेट यूनिवर्सिटी (यू० एस० एस० आर०)	308 केल्विन
सुमीटोमो, जापान	300 केल्विन
एन० पी० एल० (नई दिल्ली, भारत) (अनन्त नारलीकर)	299 केल्विन
कोलोरेडो स्टेट यूनिवर्सिटी (यू० एस० ए०) (डब्ल्यू० सम्पत)	294 केल्विन
नॉर्थ केरोलिना स्टेट यूनिवर्सिटी (यू० एस० ए०) (जे० नारायण)	290 केल्विन
यूनिवर्सिटी ऑफ कैलिफोर्निया बर्कले (यू० एस० ए०) (एम० एल० कोहेन)	290 केल्विन
यूनिवर्सिटी ऑफ मैरीलैंड, (यू० एस० ए०) (एस० एम० भगत)	240 केल्विन
यूनिवर्सिटी ऑफ ह्यूस्टन (यू० एस० ए०) (सी० डब्ल्यू० चु)	225 केल्विन
ई० सी० डी० स्टैनफोर्ड, (यू० एस० ए०) (ओविशंस्की)	155 केल्विन

पहले उल्लिखित विभिन्न अनुप्रयोगों में उच्च T_c वाले अतिचालकों का इस्तेमाल करने के लिये उनमें क्रांतिक धारा घनत्व का उच्च होना आवश्यक है। प्रकायिक तथा पतली फिल्म के रूप में एकल क्रिस्टलों पर की गई J_c संबंधी मापों से पता चलता है कि बहुक्रिस्टलीय नमूनों में पाई जाने वाली अल्प

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 31, No. 1, 1988

सार्वीकृत पायसाँ समाकल समीकरण

बी० के० जोशी तथा आर० के० अग्रवाल
गणित विभाग, शासकीय इंजीनियरिंग कालेज, बिलासपुर

[प्राप्त—12 दिसम्बर 1987]

सारांश

पायसाँ समाकल से संबंधित समाकल समीकरण का प्रतिलोमन, फलन के श्रेणी क्रम के विस्तार के आधार पर प्रस्तुत किया गया है।

Abstract

On a generalised Poisson integral equation. *By* B. K. Joshi and R. K. Agrawal, Department of Mathematics, Government. Engineering College, Bilaspur

An integral equation related to Poisson integral has been inverted by using power series expansion.

एक शोध पत्र में विडर[1] ने निम्नांकित प्रमेय स्थापित किया है—

प्रमेय :

यदि

$$f(x)=\int_0^\infty \frac{t\phi(t)}{(x^2+t^2)}dt \tag{1.1}$$

जहाँ समाकल समीकरण $x \neq 0$ के लिए पूर्णतः अभिसारी है,

$$f(x)=1/x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{1.2}$$

तो (1.1) का हल होगा

$$\phi(t)=2/\pi\left(\frac{\sin \pi a/2}{t^\alpha}\right)\sum_{k=0}^{\infty} a_k(-1)^k t^{2k}$$

$$-2/\pi\left(\frac{\cos \pi d/2}{t^\alpha}\right)\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}(-1)^k t^{2k+1} \tag{1.3}$$

इस शोधपत्र में समाकल समीकरण (1.1) को सार्वीकृत कर विभिन्न स्थितियों में हल प्रस्तुत किया गया है। सार्वीकरण के फलस्वरूप विडर[1] द्वारा प्राप्त परिणाम इस पत्र में स्थापित प्रमेय का विशिष्ट स्वरूप हो जाता है।

हमें एर्डेल्यी [2] द्वारा निम्न परिणाम ज्ञात है जिसका उपयोग आगे किया जावेगा।

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{x^2+2ax\cos\theta+a^2}\,dx = -\pi a^{s-2}\operatorname{cosec}\theta\operatorname{cosec}\pi s\sin(s-1)\theta$$

$$a>0,\ -\pi<\theta<\pi. \tag{1.4}$$

प्रमेय I :

यदि

$$f(x)=\int_0^\infty \frac{t\phi(t)}{x^2+2xt\cos\theta+t^2},\ -\pi<\theta<\pi, \tag{1.5}$$

तथा समाकल $x\neq0$ के लिए पूर्णतया अभिसारी है और

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k-\alpha},\ 0<x<\infty \tag{1.6}$$

तो समाकल समीकरण (1.5) का हल

$$\phi(t)=1/\pi\left(\frac{\sin\pi\alpha\sin\theta}{t^\alpha}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k(-1)^k t^k}{\sin(1+k-\alpha)\theta} \tag{1.7}$$

होगा।

उपपत्ति : उपर्युक्त प्रमेय को सिद्ध करने के लिए (1.7) से $\phi(t)$ का मान (1.5) के दाहिने पक्ष में रखने, समाकल एवं योग का क्रम परिवर्तन कर (1.4) का उपयोग करने पर वाम पक्ष की प्राप्ति हो जाती है।

विशिष्ट दशा : इस प्रपत्र की समाकल समीकरण (1.5) में प्रयोग की गई अष्टि अधिक सार्वीकृत होने से विडर[1] द्वारा स्थापित उपर्युक्त प्रमेय (समीकरण 1.1—1.3) उक्त प्रमेय की विशिष्ट दशा $\theta=\pi/2$ में प्राप्त हो जाता है। उसे (1.3) हल के रूप में रखने के लिए $\sin(1+k-\alpha)\pi/2$ को निर्धारित स्वरूप तक हल करना पड़ता है।

प्रमेय II :

यदि

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{x^{k+\alpha}},\ 0<x<\infty \tag{1.8}$$

तो समाकल समीकरण (1.5) का हल होगा

$$\phi(t)=1/\pi\left(\frac{\sin(\pi\alpha)\sin\theta}{t^{\alpha}}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k(-1)^k}{t^k\sin(1-k-\alpha)\theta}. \qquad (1.9)$$

उपर्युक्त विधि द्वारा इसे भी आसानी से स्थापित किया जा सकता है।

विशिष्ट दशा : जब $\theta=\pi/2$ हो और $\sin(1-k-\alpha)\pi/2$ को निर्धारित स्वरूप तक हल किया जावे तो विडर[1] द्वारा स्थापित प्रमेय IV प्राप्त होता है।

निर्देश

1. विडर, डी० वी०; Duke Math. Journal; 1966, 33, 355.

2. एर्डेल्यी, ए० Table of Integral Transforms, Vol I, 1954.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 31. No. 1, 1988

अम्लीय माध्यम में N-ब्रोमो एसिटामाइड द्वारा डायगाल तथा एथिल डायगॉल के उत्प्रेरणीय आक्सीकरण की गतिकी एवं क्रियाविधि

राज कुमार मिश्र तथा अशोक सिंह
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—दिसम्बर 1, 1987]

सारांश

N-ब्रोमोएसिटामाइड (NBA) द्वारा डायगॉल तथा एथिल डायगॉल के उत्प्रेरणीय आक्सीकरण का गतिकीय अध्ययन चार तापों पर अम्लीय माध्यम में मरक्युरिक ऐसीटेट की उपस्थिति में किया गया। डायगॉल, एथिल-डायगॉल, (NBA) H^* तथा Ru(III) के प्रति अभिक्रिया-दर प्रथम कोटि की पायी गयी। एसिटामाइड तथा मरक्यूरिक ऐसीटेट के योग का प्रभाव नगण्य रहा जबकि ऐसीटिक अम्ल तथा भारी जल (D_2O) की उपस्थिति में क्रिया-दर बढ़ी। क्लोराइड (Cl^-) आयन के योग का प्रभाव ऋणात्मक पाया गया। विभिन्न दर प्राचलों की गणना की गयी। अन्तिम उत्पाद के रूप में एसिटा-माइड तथा सापेक्ष डायगॉलिक ऐल्डिहाइड की पहचान हुई। उपर्युक्त प्रायोगिक परिणामों की पुष्टि के आधार पर क्रिया-दर नियम का गणितीय रूप इस प्रकार होगा :

$$-\frac{d[\text{NBA}]}{dt}=\frac{k'\,[\text{NBA}]\,[\text{H}^*]\,[\text{डायगॉल}]\,[\text{Ru(III)}]_T}{K_1\,[\text{H}_2\text{O}]+[\text{Cl}^-]}$$

Abstract

Kinetics and mechanism of catalysed oxidation of digol and ethyl digol by N-bromoacetamide in acidic media. *By* Raj Kumar Misra and Ashok Kumar Singh, Department of Chemistry, University of Allahabad.

The kinetics of the catalysed oxidation of digol and ethyl digol by N-bromo-acetamide in acidic media were studied at four temperatures in presence of mercuric

acetate. A first-order dependence to both digols, H^+ and $RuCl_3$ have been observed. Acetamide and mercuric acetate additions have negligible effect, while addition of acetic acid and D_2O have a positive effect on the reaction rate. The addition of Cl^- ions retards the reaction rate. Various rate parameters have been calculated. Acetamide and corresponding digolic aldehydes were identified as the end products. The rate law expression has been obtained in confirmity with the above observations as :

$$-\frac{d[\text{NBA}]}{dt}=\frac{k'\,[\text{NBA}]\,[\text{Digol}]\,[\text{H}^+]\,[\text{Ru(III)}_T]}{\text{K}_i\,[\text{H}_2\text{O}]+[\text{Cl}^-]}$$

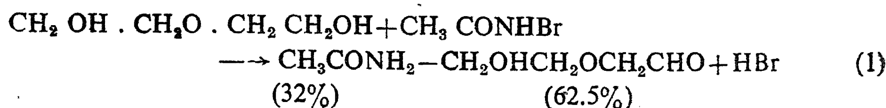
यद्यपि कि N-ब्रोमोएसिटामाइड (NBA) का उपयोग कार्बनिक पदार्थों के बनाने में आक्सीकारक तथा हैलोजिनेटिंग अभिकारक के रूप में हुआ है [1] किन्तु इसकी आक्सीकारक प्रवृत्ति पर बहुत ही कम ध्यान दिया गया है। हाल में ही ऐल्कोहल[2] तथा डाइमेथिल सल्फोक्साइड[3] की आक्सीकरण क्रिया में इसे प्रयुक्त किया गया। परन्तु NBA की उत्प्रेरक की उपस्थिति में आक्सीकरण अभिक्रिया अज्ञात होने के कारण रूथेनियम (III) क्लोराइड को उत्प्रेरक के रूप में लेकर वर्तमान कार्य में NBA के आक्सीकरण का अध्ययन अम्लीय माध्यम में मरक्युरिक ऐसीटेट की उपस्थिति में किया गया। इस प्रपत्र में डायगाल तथा एथिल डायगाल के आक्सीकरण की गतिकी का अध्ययन दिया गया।

प्रयोगात्मक

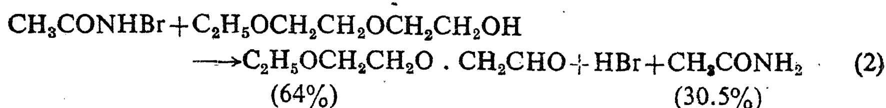
प्रयुक्त सभी अभिकारक उपलब्ध विशुद्ध कोटि के थे। एथिल डायगाल तथा डायगाल (बी० डी० एच० ए० आर०) N-ब्रोमोएसिटामाइड (मर्क सुचर्ड), सोडियम परक्लोरेट, मरक्यूरिक ऐसीटेट तथा परक्लोरिक अम्ल (ई० मर्क) प्रयोग में लाये गये तथा सभी विलयन द्विआसुत जल में बनाये गये। एन० बी० ए० का ताजा विलयन नित्य बनाकर उसकी शक्ति का निर्धारण आयडोमितीय विधि[4] द्वारा किया गया। ड्यूटेरियम आक्साइड (शुद्धता 99%) ट्राम्बे-बम्बई से प्राप्त किया गया। प्रकाश-रासायनिक क्रियाओं के निवारणार्थ कालिख प्रलेपित शंक्वाकार फ्लास्कों को प्रयुक्त किया गया।

35° ताप पर केवल सब्सट्रेट को छोड़कर सभी अभिकारकों को ताप-नियामक यन्त्र में रखकर क्रिया को डायगाल/एथिल डायगाल की उपयुक्त मात्रा डालकर गतिशील किया गया। एक नियत समयान्तराल पर अनुमापन किया गया, जिसमें क्रिया लगभग 70% हुई।

NBA तथा डायगाल एवं एथिल डायगाल के विभिन्न अनुपात लेकर कई प्रयोग किये गये तथा प्रत्येक सेट में बचे हुए NBA की मात्रा का परिमापन किया गया। प्राप्त परिणामों से निष्कर्ष निकला कि डायगाल तथा एथिल डायगाल के एक मोल हेतु NBA का भी एक ही मोल अलग-अलग प्रयुक्त हुआ। अन्तिम उत्पाद की परीक्षा पारम्परिक विधि से की गयी[5]। स्टायकियोमिटरी समीकरण (1) तथा (2) के रूप में निर्धारित हुआ।



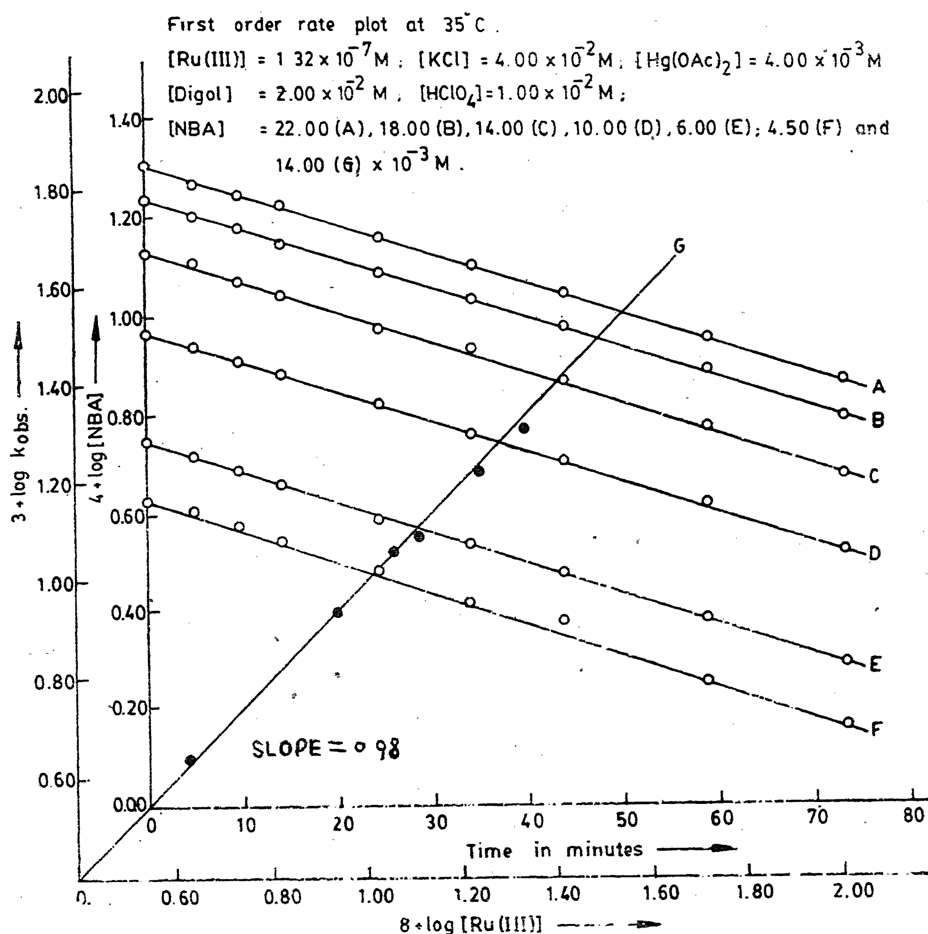
$$CH_2\,OH\,.\,CH_2O\,.\,CH_2\,CH_2OH + CH_3\,CONHBr \longrightarrow \underset{(32\%)}{CH_3CONH_2} - \underset{(62.5\%)}{CH_2OHCH_2OCH_2CHO} + HBr \quad (1)$$



$$CH_3CONHBr + C_2H_5OCH_2CH_2OCH_2CH_2OH \longrightarrow \underset{(64\%)}{C_2H_5OCH_2CH_2O\,.\,CH_2CHO} + HBr + \underset{(30.5\%)}{CH_3CONH_2} \quad (2)$$

परिणाम तथा विवेचना

उत्प्रेरक रूथेनियम (III) की उपस्थिति में आक्सीकरण गतिकी का अध्ययन अभिकारकों की अनेक सान्द्रताओं पर किसी एक के सापेक्ष किया गया। गति स्थिरांक से प्रथम कोटि की पुष्टि हुई (सारणी 1), पुनः जब log[NBA] तथा समय के बीच जो आरेख खीचे गये रैखिक आये जो यह प्रकट करते हैं कि [NBA] पर दर प्रथम कोटि की है। चित्र 1 तथा सारणी (1) से स्पष्ट है कि विभिन्न



चित्र 1

अभिकारकों की सान्द्रता बढ़ाने पर kobs का मान भी रैखिक रूप से बढ़ता है जो सीधा अनुपातिक प्रक्रिया दिखाता है यथा log[Ru(III)] तथा log kobs के मध्य खीचे गये आरेख से स्पष्ट है। (चित्र 1B)

ताप परिवर्तन से अभिक्रिया दर में उल्लेखनीय प्रभाव पड़ा जबकि ऐसीटिक अम्ल तथा भारी जल के विभिन्न अनुपात के योग से क्रिया दर में वृद्धि हुई। सारणी 2 ऊष्मागतिक सक्रियण प्राचलों की गणना की गयी (सारणी 3)।

अम्लीय माध्यम में $RuCl_3$ निम्न प्रकार से रहता है जिसकी पुष्टि प्रयोग से प्राप्त क्लोराइड आयन (Cl^-) के ऋणात्मक प्रभाव से भी होती है [6–7]। अतः $[RuCl_5 . H_2O]^{2-}$ ही $RuCl_3$ की वास्तविक स्पीशीज होगी।



$$[RuCl_6]^{3-} + H_2O \rightleftharpoons [RuCl_5\,H_2O]^{2-} + Cl^-$$

जबकि अम्लीय माध्यम में NBA साम्य (1, 2) तथा (3 एवं 4) में रहता है[2] जो गतिकीय दृष्टि-कोण से पृथक करने योग्य नहीं है।

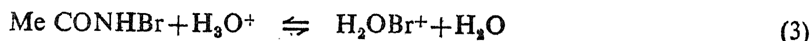


$$Me\,CONHBr + H_2O \rightleftharpoons Me\,CONH_2 + HOBr \quad (1)$$



$$HOBr + H_3O^+ \rightleftharpoons H_2OBr^+ + H_2O \quad (2)$$

अथ



$$Me\,CONHBr + H_3O^+ \rightleftharpoons H_2OBr^+ + H_2O \quad (3)$$

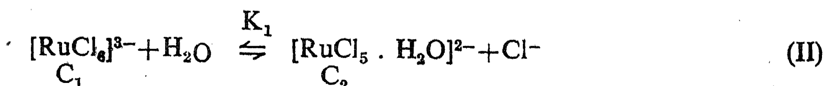


$$(Me\,CONH_2Br)^+ + H_2O \rightleftharpoons H_2OBr^+ + Me\,CONH_2 \quad (4)$$

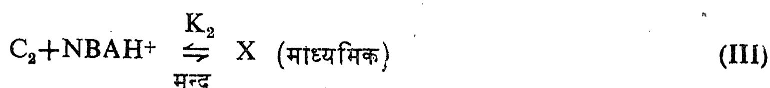
फलतः NBA, $NBAH^+$, HOBr तथा H_2OBr^+ चार स्पीशीज हुईं। चूंकि खनिज अम्लों की अनुपस्थिति में आक्सीकरण नहीं होता है अतः HOBr स्पीशीज नहीं हो सकती। ठीक इसी प्रकार ऐसिटा-माइड योग का प्रभाव नगण्य है तथा मरक्यूरिक ऐसीटेट स्कैवेन्जर[8] प्रभाव दिखाता है फलतः H_2OBr एवं NBA दोनों स्पीशीज उपयुक्त नहीं प्रतीत होतीं। अतः आक्सीकारक स्पीशीज $NBAH^+$ हुई। उपर्युक्त तथ्यों के आधार पर निम्नलिखित क्रियाविधि सुझाई जा सकती है—



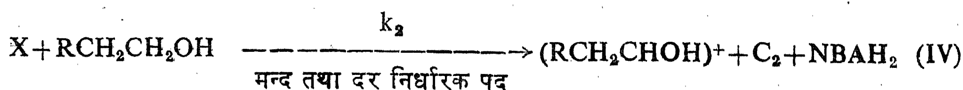
$$NBA + H^+ \overset{K}{\rightleftharpoons} NBAH^+ \quad (I)$$



$$\underset{C_1}{[RuCl_6]^{3-}} + H_2O \overset{K_1}{\rightleftharpoons} \underset{C_2}{[RuCl_5 . H_2O]^{2-}} + Cl^- \quad (II)$$



$$C_2 + NBAH^+ \underset{\text{मन्द}}{\overset{K_2}{\rightleftharpoons}} X \;(\text{माध्यमिक}) \quad (III)$$



$$X + RCH_2CH_2OH \xrightarrow[\text{मन्द तथा दर निर्धारक पद}]{k_2} (RCH_2CHOH)^+ + C_2 + NBAH_2 \quad (IV)$$

सारणी 1

अभिक्रिया दर पर अभिकर्मक सान्द्रता का प्रभाव (ताप 35°)

[KCl]$=4.00\times10^{-2}$ M, [Hg(OAC)$_2$]$=4.00\times10^{-3}$ M

10^3 [NBA] M		10^2[DIGOL] M	10^2[$HClO_4$] M	10^7[Ru(III)] M	kobs$\times10^5$ D. G.	Sec^{-1} E. D. G.
4.50		2.00	1.00	1.50	23.12	17.16
6.00		2.00	1.00	1.50	23.03	—
7.50		2.00	1.00	1.50	—	16.72
10.00		2.00	1.00	1.50	23.08	16.64
13.00		2.00	1.00	1.50	—	16.70
14.00		2.00	1.00	1.50	23.14	—
18.00		2.00	1.00	1.50	23.04	16.72
21.00		2.00	1.00	1.50	23.16	—
22.00		2.00	1.00	1.50	—	16.74
14.50 a	10.00 b	1.00	1.00	1.50	11.80	8.30
14.50 a	10.00 b	1.25	1.00	1.50	14.92	10.32
14.50 a	10.00 b	2.00	1.00	1.50	23.10	16.48
14.50 a	10.00 b	2.50	1.00	1.50	29.32	20.84
14.50 a	10.00 b	4.00	1.00	1.50	46.78	33.32
14.50 a	10.00 b	5.00	1.00	1.50	58.54	41.34
14.50 a	10.00 b	2.00	1.25	1.50	29.82	21.10
14.50 a	10.00 b	2.00	1.66	1.50	39.50	27.92
14.50 a	10.00 b	2.00	2.00	1.50	46.86	33.22
14.50 a	10.00 b	2.00	3.30	1.50	77.10	55.04
14.50 a	10.00 b	2.00	5.00	1.50	116.92	83.40
14.50 a	10.00 b	2.00	1.00	0.40	7.96	4.96
14.50 a	10.00 b	2·00	1.00	0.80	15.50	9.40
14.50 a	10.00 b	2.00	1.00	1.20	21.14	14.22
14.50 a	10.00 b	2.00	1.00	1.72	31.06	19.04
14.50 a	10.00 b	2.00	1.00	2.216	38.84	23.56

जहाँ a तथा b क्रमशः DG और EDG की सान्द्रता बताते हैं।

सारणी 2

अभिक्रिया दर पर ताप, ऐसीटिक अम्ल तथा ड्यूटीरियम आक्साइड $[D_2O]$ विचरण का प्रभाव

$[Substrate]=2.00\times10^{-2}$ M $[HClO_4]=1.00\times10^{-2}$ M,

$[KCl]=4.00\times10^{-2}$ M, $[Hg(OAC)_2]=4.00\times10^{-3}$ M

$[Ru(III)]=1.50\times10^{-3}$ M $[NBA]=10.00\times10^{-3}$ M

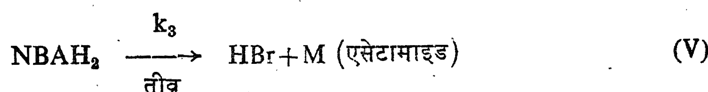
ताप °C	[ऐसीटिक अम्ल-पानी] V/v(%)	$[D_2O-H_2O]$ V/v(%)	$kobs\times10^5$ DG	sec^{-1} EDG
30	—	—	16.10	11.62
35	—	—	23.12	16.42
40	—	—	32.54	23.16
45	—	—	46.48	32.94
35	0—100	0—100	23.06	16.44
35	20—80	0—100	32.04	24.06
35	35—65	0—100	45.72	34.58
35	50—50	0—100	56.08	43.24
35	60—40	0—100	70.02	32.06
35	0—100	30—70	41.62	34.36
35	0—100	50—50	47.36	37.04
35	0—100	70—30	53.06	41.28

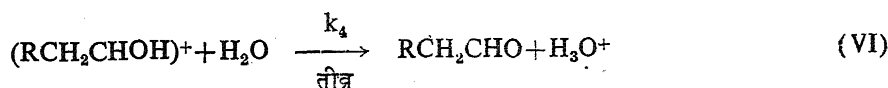
सारणी 3

ऊष्मागतिक सक्रियण-प्राचल

	सक्रियण ऊर्जा (ΔE^{++}) K.Cal mol^{-1}	आवृत्ति गुणक (A) $mole^{-1}$ sec^{-1} 1	सक्रियण की एन्ट्रॉपी (ΔS^{++}) e. u.	सक्रियण की मुक्त ऊर्जा (ΔG^{++}) K.Cal mol^{-1}
डायगॉल	12.58	1.08×10^9	−18.28	17.68
एथिल डायगॉल	13.52	3.14×10^9	−16.42	17.26

जहाँ R, CH_2CHCH_2O तथा $C_2H_5CH_2OCH_2O$ डायगॉल तथा एथिल डायगॉल में है





अतः NBA के द्वारा आक्सीकरण की दर को निम्न प्रकार से दिखाया जा सकता है।

$$-\frac{d[NBA]}{dt} = k_2 \text{ [डायगॉल] } [X] \quad (4)$$

अब स्थायी दशा उपचार को व्यवहृत करने तथा

$$1 \gg Kk_2 [NBA] [H^+]$$

मानने पर समी० (4) को निम्नलिखित रूप में पाया जा सकता है—

$$-\frac{d[NBA]}{dt} = \frac{k' [NBA] [H^+] [Diagol] [Ru(III)]_T}{K_1 [H_2O] + [Cl^-]} \quad (5)$$

$$k' = K\, k_1\, K_2\, k_2\, [H_2O]$$

क्रिया दर (5) की पुष्टि विलायक आइसोटोप प्रभाव द्वारा भी होती है क्योंकि क्रिया प्रविधि के पद (1) में D_2O का दर नियतांक प्रोटॉन का साम्य दशा में तीव्र बदलाव दिखाता है। Cl^- आयन योग के कारण दर नियतांक की कमी भी समीकरण के अनुरूप है। फलतः प्रयुक्त क्रिया प्रविधि उपयुक्त है।

निर्देश

1. फिलर, आर०, Chem. Rev., 1963, **63**, 21.
2. मुकर्जी, जोगेश्वर तथा बनर्जी, कल्याण के०, J. Org. Chem., 1981, **46**, 2323.
3. राधाकृष्ण मूर्ति, पी० एस० तथा बसु, एन० सी०, Indian J. Chem., 1981, **20A**, 269.
4. वेंकट सुब्रामण्यम, एन० तथा थाइगाराजन, वी०, an. J. Chem. 1969, **47(4)**, 694.
5. फीगल, एफ०, Spot Test in Organic Analysis, एल्सेवियर पब्लिशिंग कम्पनी, न्यूयार्क 1966, 325.
6. कोनिक, आर० ई० इत्यादि, J. Am. Chem. Soc., 1958, **80**, 2646.
7. ग्रिफिथ, डब्लू० पी०, The Chemistry of Rare Platinum metals (Inter. Sci. Pvt. 1967, 141.
8. वेलर, जे० सी०, The Chemistry of Coordination compounds. Reinhold N. T. 1956. पृष्ठ 4

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol 31, No. 1, 1988

दूरीक समष्टि में कतिपय स्थिर बिन्दु प्रमेय

एल० सी० राजपूत
गणित विभाग, सागर विश्वविद्यालय, सागर (म० प्र०)

[प्राप्त—सितम्बर 12, 1987]

सारांश

इस प्रपत्र में तीन प्रतिचित्रणों के लिए सार्वीकरणों को सिद्ध किया गया है।

Abstract

Some fixed point theorems in metric space. *By* L. C. Rajput, Department of Mathematics, University of Sagar, Sagar (M. P.).

We prove the generalizations for three mappings.

जैन तथा दीक्षित ने निम्नलिखित प्रमेयों को सिद्ध किया है[1]।

प्रमेय 1.1 यदि S तथा T प्रतिचित्रण (mappings) हैं दूरीक समष्टि (metric space) X के जिससे असमिका (inequality)

$$\{d(Sx, Ty)\}^2 \leqslant \alpha\, d(x, Ty)\, d(x, Sx) + \beta\, d(y, Sx)\, d(y, Ty) + \gamma\, d(Sx, Ty)\, d(x, y)$$

की तुष्टि समस्त $x, y \in X$, के लिए होती है जहाँ $\alpha, \beta > 0, 0 \leqslant \gamma < 1$. यदि S का स्थिर विन्दु z हो और T का स्थिर विन्दु w हो तो $z = w$ और z होता है S तथा T का अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु।

प्रमेय 1.2 यदि S तथा T प्रतिचित्रण हैं पूर्ण दूरीक समष्टि X के जिससे असमिका

(i) $$\{d(Sx, Ty)\}^2 \leqslant \alpha\, d(x, Ty)\, d(x, Sx) + \beta\, d(y, Sx)\, d(y, Ty) + \gamma\, d(Sx, Ty)\, d(x, y).$$

की तुष्टि समस्त $x, y \in X$ के लिए जहाँ $\alpha, \beta > 0, 0 \leqslant \gamma < 1$ होती है

(ii) $[(\alpha+\gamma)+\{(\alpha+\gamma)^2+4\alpha\}^{1/2}]\,[(\beta+\gamma)+\{(\beta+\gamma)^2+4\beta\}^{1/2}]<4$

तो S तथा T में अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु z होता है।

तीनों प्रतिबन्धों के लिए हम निम्नलिखित सार्वीकरण सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 2.1 यदि A, S तथा T प्रतिचित्रण हैं पूर्ण दूरीक समष्टि X के जिससे असमिका

$$\{d(Ax, Ay)\}^2 \leqslant \alpha\, d(Ax, Ty)\, d(Ax, Sx)+\beta\, d(Ay, Sx)\, d(Ay, Ty)$$
$$+\gamma\, d(Sx, Ty)\, d(Ax, Ay).$$

की तुष्टि समस्त $x, y \in X$, के लिए होती है जहाँ $\alpha, \beta > 0$ तथा $0 \leqslant \gamma < 1$. यदि A तथा S का अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु z हो तथा A एवं T का अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु w हो तो $z=w$ और z होता है A, S तथा T का अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु।

उपपत्ति : हमें ज्ञात है कि

$$\{d(z, w)\}^2=\{d(Az, Aw)\}^2$$
$$\leqslant \alpha\, d(Az, Tw)\, d(Az, Sz)+\beta\, d(Aw, Sz)\, d(Aw, Tw)$$
$$+\gamma\, d(Sz, Tw)\, d(Az, Aw) \leqslant \gamma\{d(z, w)\}^2$$

चूंकि $\gamma < 1$ का अर्थ है कि $z=w$. इस तरह प्रमेय सिद्ध हुई।

प्रमेय 2.2 : माना कि A तथा S अभिगमन (commuting) प्रतिचित्रण हैं और माना कि A तथा T पूर्ण दूरीक समष्टि (X, d) में अभिगमन प्रतिचित्रण है जिससे असमिका

(i) $\{d(Ax, Ay)\}^2 \leqslant \alpha\, d(Ax, Ty)\, d(Ax, Sx)$

$$+\beta\, d(Ay, Sx)\, d(Ay, Ty)+\gamma\, d(Sx, Ty)\, d(Ax, Ay)$$

की तुष्टि समस्त $x, y \in X$ के लिए, जहाँ $\alpha, \beta > 0, 0 \leqslant \gamma > 1$ होती है।

तथा

(ii) $\dfrac{\beta+\gamma}{1-\beta}<1,\ \dfrac{\alpha+\gamma}{1-\alpha}<1$

यदि A, S तथा T संतत हों तो A, S एवं T का एक अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु होता है।

उपपत्ति : माना कि X में x_0 कोई याहच्छिक बिन्दु है और अनुक्रम $\{Ax_n\}$ को किसी n के लिए इस तरह परिभाषित करें कि

$$Sx_{2n-1}=Ax_{2n-2}, \quad Tx_{2n}=Ax_{2n-1}$$

अब इसके आगे असमिका (i) को व्यबहृत करने पर

$$\begin{aligned}\{d(Ax_{2n}, Ax_{2n-1})\}^2 &= \{d(Ax_{2n-1}, Ax_{2n})\}^2 \\ &\leqslant \alpha\, d(Ax_{2n-1}, Tx_{2n})\, d(Ax_{2n-1}, Tx_{2n-1}) \\ &\quad +\beta\, d(Ax_{2n}, Sx_{2n-1})\, d(Ax_{2n}, Tx_{2n}) \\ &\quad +\gamma\, d(Sx_{2n-1}, Tx_{2n})\, d(Ax_{2n-1}, Ax_{2n}). \\ &\leqslant d(Ax_{2n}, Ax_{2n-1})\,\{\beta\, d(Ax_{2n}, Ax_{2n-2}) \\ &\quad +\gamma\, d(Ax_{2n-2}, Ax_{2n-1})\}.\end{aligned}$$

अथवा

$$d(Ax_{2n}, Ax_{2n-1}) \leqslant \frac{\beta+\gamma}{1-\beta}\, d(Ax_{2n-1}, Ax_{2n-2})$$

चूँकि

$$\frac{\beta+\gamma}{1-\beta}<1$$

$$d(Ax_{2n}, Ax_{2n-1}) < d(Ax_{2n-1}, Ax_{2n-2})$$

इसी प्रकार

$$\begin{aligned}d(Ax_{2n+1}, Ax_{2n}) &\leqslant \frac{\alpha+\gamma}{1-\alpha}\, d(Ax_{2n}, Ax_{2n-1}) \\ &< d(Ax_{2n}, Ax_{2n-1})\end{aligned}$$

क्योंकि $n=1, 2, \ldots$

अत:

$$d(Ax_{n+1}, Ax_n) < d(Ax_n, Ax_{n-1}) < \ldots < d(Ax_1, Ax_0).$$

इससे यह निकलता है कि $\{Ax_n\}$ एक कौशी अनुक्रम है अतएव इसकी एक सीमा z होती है X में। चूंकि अनुक्रम $\{Sx_{2n+1}\}$ एवं $\{Tx_{2n}\}$ अनुक्रम हैं $\{Ax_n\}$ के अतएव इनकी एक ही सीमा z है। चूंकि A तथा S संतत हैं अतएव

$$\begin{aligned}Sz &= \lim_{n\to\infty} SAx_{2n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} ASx_{2n+1}=Az\end{aligned}$$

इसी तरह

$$Tz = Sz$$

इससे यह निकलता है कि

$$\{d(Az, A^2z)\}^2 \leqslant \alpha\, d(Az, TAz)\, d(Az, Sz) + \beta\, d(A^2z, Sz)\, d(A^2z, TAz)$$

$$+ \gamma\, d(Sz, TAz)\, d(Az, A^2z) \leqslant \gamma\{d(Az, A^2z)\}^2$$

और चूंकि $\gamma < 1$ अतएव हमें $Az = A^2z$ प्राप्त होगा ।

अन्त में, $Az = z_1$ रखने पर

$$Az_1 = A^2z = z_1 = ASz = SAz = Sz_1,$$

इसी प्रकार

$$Az_1 = Tz_1$$

अतएव z_1 उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु है A, S तथा T का z_1 का अद्वितीयता सरलता से सिद्ध की जा सकती है । इस तरह प्रमेय की उपपत्ति पूरी हुई ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस शोधपत्र की तैयारी में डा० के० सी० श्रीवास्तव ने जो सहायता पहुँचाई उसके लिए लेखक उनका आभारी है ।

निर्देश

1. जैन, आर० के० तथा दीक्षित, एस० पी०, Indian J. Pure & Applied Maths, 1983, **14(8)**, 904-943.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 31, No. 1 1988

p-मानकित समष्टियों में फलनकों के कुछ गुण

प्रेमचन्द्र
गणित अध्ययनशाला, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—सितम्बर 4, 1987]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में दो प्रमेय सिद्ध किये गये हैं जब भी X.p-मानकित रैखिक समष्टि है जिसमें $p>0$ तथा $A:X \to C$ रैखिक है।

Abstract

Some Properties of functionals in p-normed spaces. *By* Prem Chandra, School of Studies in Mathematics, Vikram University, Ujjain (M. P.).

In this paper the author proves the following theorems whenever X is a p-normed linear space with $p>0$ and $A : X \to C$ is linear :

Theorem 1. *Let $A \not\equiv 0$ be bounded and let $M=\{x \in X : A(x)=\alpha\}$ where α is a scalar.* Then, the distance of the hyperplane M from the point $x_0 \in X$,

$$d(x_0, M)=|\alpha-A(x_0)|^p||A||^{-p}.$$

Theorem 2. *A is continuous if and only if* the set $\{x \in X : A(x)=\alpha\}$ is closed.

1. परिभाषाएँ तथा संकेतन

माना कि X अतुच्छ रैखिक समष्टि (non-trivial linear space) है तथा माना $p>0$ तो फलन $||.|| : X \to R$ p-मानक कहलाता है यदि समस्त $x, y \in X$ तथा किसी अदिश α के लिए

(i) $||x||=0 \Rightarrow x=0$

(ii) $||\alpha x||=|\alpha|^p||x||$

(iii) $||x+y|| \leqq ||x||+||y||$.

समष्टि $(X||.||, p)$ p-मानकित रैखिक समष्टि[2] कहलाता है और इसे इस पूरे प्रपत्र में X द्वारा अंकित किया जावेगा। 1-मानकित समष्टि केवल मानकित समष्टि है। यदि X तथा Y दो मानकित समष्टियाँ हों तो पहले की तरह वे इन समष्टियों के विभिन्न मानक होते हैं। किन्तु सरलता की दृष्टि से, तो हम दोनों समष्टियों पर मानकों के लिए उसी संकेतन $||.||$ का प्रयोग करेंगे।

माना X तथा Y p-मानकित और q-मानकित समष्टियाँ हैं और माना $A : X \rightarrow Y$ रैखिक हो तो A को X पर संतत कहा जाता है यदि $x \in X$ से स्वतन्त्र ऐसा अचर $H>0$ विद्यमान हो जिससे कि समस्त $x \in X$ के लिए

$$||A(x)|| \leqq H||x||^{q/p},$$

A का मानक निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है

$$||A|| = \sup_{x \neq \theta} \{||A(x)||/||x||^{q/p}\}.$$

यदि A संतत या परिबद्ध हो तो $||A||$ सान्त है। यदि $p=q=1$; तो ये परिभाषाएँ मैडाक्स[2] के अनुसार होंगी।

C के द्वारा हम समस्त अभिसारी अनुक्रमों के समष्टि को अंकित करेंगे जो सप-नार्म के अन्तर्गत मानकित है जबकि C के द्वारा हम समस्त संमिश्र संख्याओं के समष्टि को अंकित करेंगे।

2. प्रस्तावना

हैन-बनाख प्रसार प्रमेय के सम्प्रयोग के रूप में निम्नलिखित परिणाम ज्ञात है।[1]

प्रमेय : A माना M उपसमष्टि है मानकित रैखिक समष्टि X का और कल्पना किया कि $x_1 \in X$ में ऐसा गुण है कि x_1 से M तक दूरी $d(x_1, M)=d$ धनात्मक है। तब एक परिबद्ध रैखिक फलनक विद्यमान होता है जिसका मानक 1 है जिससे कि $F(x_1)=d$ तथा किसी $x \in M$ के लिए $F(x)=0$। हम निम्नलिखित को सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 1. X p-मानकित रैखिक समष्टि है और माना $A : X \rightarrow C$ परिबद्ध रैखिक फलनक है। कल्पना किया $A \not\equiv 0$ तथा

$$M = \{x \in X / A(x) = \alpha\},$$

जहाँ α स्थिर अदिश है यदि d दूरी हो अधिसमतल (hyperplane) M की बिन्दु $a \in X$ से तो

$$d = |\alpha - A(a)|^{p} / ||A||^{p}.$$

किसी रैखिक फलनक के सातत्य की विख्यात कसौटी निम्न प्रकार है—

प्रमेय B. एक रैखिक फलनक f मानकित रैखिक समष्टि X पर संतत होता है यदि और केवल यदि $Ker(f)$ परिबद्ध हो।

हम इस परिणाम को निम्नलिखित रूप में आगे बढ़ाते हैं—

प्रमेय 2. माना X एक p-मानकित समष्टि है और माना $A : X \to C$ रैखिक है तब A संतत होता है यदि और केवल यदि समुच्चय $F = \{x \in X / A(x) = \alpha\}$ परिबद्ध हो।

3. **प्रमेयों की उपपत्ति**

3.1. **प्रमेय 1 की उपपत्ति :** हमें ज्ञात है कि

$$d = \inf \{||x-a|| / x \in M\}.$$

दशा $a \in M$ में उपपत्ति तुच्छ है। इस प्रकार हम दशा a / M पर विचार करेंगे। चूंकि A p-मानकित रैखिक समष्टि X पर परिबद्ध रैखिक फलनीय है अतएव

$$|A(x)| \leqq ||A|| \; ||x||^{1/p} \text{ समस्त } x \in X \text{ के लिए।}$$

अतः

$$||x-a|| \geqq |A(x)-A(a)|^p / ||A||^p,$$

जिसका अर्थ होता है कि

$$d = \inf_{x \in M} \{||x-a||\} \geqq |\alpha - A(a)|^p / ||A||^p. \tag{3.1}$$

अपरंच

$$||A|| \sup_{x \neq 0} \{|A(x)| / ||x||^{1/p}\} \; (x \in X)$$

अतएव दिये हुए $\epsilon > 0$; के लिए $y \in X$ इस तरह विद्यमान है कि

$$||A||^p < \{|A(y)|^p / ||y||\} \; (1+\epsilon)^p$$

अथवा

$$||y / A(y)|| < (1+\epsilon)^p / ||A||^p.$$

अतः

$$||(\alpha - A(a)) y / A(y)|| < |\alpha - A(a)|^p (1+\epsilon)^p / ||A||^p$$

अथवा

$$||x-a|| < |\alpha - A(a)|^p \; (1+\epsilon)^p / ||A||^p,$$

जहाँ

$$x = a + [\alpha - A(a)] y / A(y).$$

किन्तु $A(x) = \alpha$ जिसका अर्थ है $x \in M$ अतएव

$$\inf_{x \in M} \{||x-a||\} < |\alpha - A(a)|^p (1+\epsilon)^p / ||A||^p,$$

जिससे प्राप्त होता है

$$d \leqq |\alpha - A(a)|^p / ||A||^p \tag{3.2}$$

क्योंकि $\epsilon>0$ यादृच्छिक है। (3.1) तथा (3.2) को संयुक्त करने पर हमें वांछित परिणाम प्राप्त होता है।

3.2 प्रमेय 2 की उपपत्ति : माना A संतत है। तब हम देखते हैं कि

$$A^{-1}[\{\alpha\}]=F$$

परिबद्ध है क्योंकि $\{\alpha\}$ परिबद्ध है C में।

विलोमतः माना F परिबद्ध है। यदि $F=X$, तो A अचर है अतएव यह संतत है। यदि $F\neq X$, तो $X-F$ अरिक्त खुला समुच्चय है। साथ ही, समस्त $a\in X-F$ के लिए $A(a)-\alpha\neq 0$, अतएव हम किसी $f\in F$ तथा $a\in X-F$ के लिए रखेंगे

$$b=[(1+\alpha)\ (a-f)]/[A(a)-\alpha]$$

जिससे $A(b)=1+\alpha$ तथा

$$b\in X-F.$$

अतएव ऐसे $r>0$ का अस्तित्व होता है कि

$$S(b,\ r)\subset X-F,$$

जहाँ $S(b,\ r)$ सूचित करता है खुले गोले को जिसका केन्द्र b पर है त्रिज्या r है।

अब हम लेंगे

$$V=\{x\in X/|A(x)|<1+|\alpha|\}$$

तथा सिद्ध करेंगे कि

$$S(\theta,\ r)\subset V. \tag{3.3}$$

इसके विपरीत, माना कि कोई ऐसा $x\in S(\theta,\ r)$ विद्यमान है जिससे $x\notin V$ अर्थात्

$$|A(x)|\geqq 1+|\alpha|.$$

तो चूँकि $y=-x/A(x)$, $A(b+y)=\alpha$ जिससे सिद्ध होता है कि

$$b+y\in F.$$

अपरंच

$$\begin{aligned}||b+y-b|| &= ||x||/|A(x)|\\ &\leqq ||x||\\ &< r,\end{aligned}$$

जो सिद्ध करता है कि

$$b+y\in S(b,\ r).$$

अतः इसका अर्थ हुआ कि

$$F\cap S(b,\ r)\neq\phi.$$

यह विरोधाभास है फलस्वरूप (3.3) सत्य है जिसका अर्थ यह हुआ कि

$$\|x\|<r \Rightarrow |A(x)|<1+|a|. \tag{3.4}$$

किसी $x \in X$ के लिए जिसके साथ $x \neq \theta$, हम निश्चित करते हैं

$$x_1=\{r/(2\|x\|)\}^{1/p}x$$

जिससे कि

$$\|x_1\|<r$$

तथा (3.4) मे

$$|A(x_1)|<1+|a|.$$

दूसरी ओर

$$|A(x_1)=\{r/(2\|x\|)\}^{1/p}\ |A(x)|$$

अतएव

$$|A(x)|<M\|x\|^{1/p},$$

जहाँ

$$M=(1+a)\ (2/r)^{1/p}.$$

फलस्वरूप $M>0$ ऐसा है कि

$$|A(x)| \leqq M\|x\|^{1/p}, \text{ समस्त } x \in X \text{ के लिए}$$

इस तरह उपपत्ति पूरी हुई।

टिप्पणी : प्रमेय 2 की दशा $a=0$ प्रमेय B है।

उपप्रमेय : माना कि $A : c \to C$ को

$$A(x)= \lim_{n \to \infty} x_n \ (x \in c).$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है तो समुच्चय

$$F=\{x \in c / A(x)=1\}$$

संवृत होता है। इस प्रेक्षण से कि

$$|A(x)| \leqq \sup_n |x_n|=\|x\|$$

उपप्रमेय की उपपत्ति प्राप्त होती है।

निर्देश

1. जार्ज बैचमैन तथा लारेंस नारिसी, *Functional Analysis*, एकेडमिक प्रेस, लन्दन, 1972.
2. मैडाक्स, आई०जे०, *Elements of Functional Analysis*, कैम्ब्रिज विश्वविद्यालय प्रेस, 1970.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 31, No. 1, 1988

रीवाँ के विभिन्न स्थलों में कैलोनिक्सन म्यूरीकेटुम की वृद्धि का अध्ययन

एस० एन० द्विवेदी तथा अर्चना पाण्डेय
610/5 सिविल लाइन्स, रीवाँ- 486001

[प्राप्त-नवम्बर 1, 1987]

सारांश

इस-शोध पत्र में रीवाँ के विभिन्न स्थलों में अध्ययन किए गए **कैलोनिक्सन म्यूरीकेटुम** जी० डान की वृद्धि का विवरण दिया गया है। उर्रहट में इसकी वृद्धि अधिकतम तथा शासकीय विज्ञान महाविद्यालय के वानस्पतिक उद्यान में सबसे कम पायी गयी। फास्फोरस एवं नाइट्रोजन युक्त मृदा में इस पौधे की अच्छी वृद्धि होती है। इसके पुष्पन एवं फलन का भी उल्लेख किया गया है।

Growth performance of *Calonyction muricatum* in different localities of Rewa. *By* S. N. Dwivedi and Archana Pandey, 610/5 Civil Lines, Rewa-486 001

Growth performance of *Calonyction muricatum* G. Don was studied in different localities of Rewa and is discussed in the present paper. It was observed that the growth of this species was maximum in Urrahat and minimum in Botanical garden of Government Science College, Rewa. The soil rich in phosphorus and nitrogen showed luxuriant growth. An attempt has been also made to enumerate the flowering and fruiting of this plant.

कैलोनिक्सन म्यूरीकेटुम बरसात के दिनों में पाया जाने वाला काँनवालव्युलेसी कुल का सदस्य है। इसका पौधा वल्लरी (twiner) होता है। यह बाड़ियों में पाए जाने वाले दूसरे पौधों, जैसे-सेहुड़ा (*Euphorbia* sp.), बेशरम (*Ipomoea crassicaulis*), मेहगुड़ (*Duranta repens*), लेन्टाना (*Lantana camara*) आदि को आधार बनाकर ऊपर चढ़ता है। इसके पुष्प शकरकन्द (*Ipomoea batatus*) के आकार के होते हैं। ये द्विलिंगी होते हैं तथा इनमें स्वयं परागण पाया जाता है[1]।

प्रयोगात्मक

रीवाँ के छ: विभिन्न स्थलों में इस पौधे की वृद्धि का अध्ययन किया गया है। स्थलों का चुनाव मृदा के लक्षणों के आधार पर किया गया। मान्य विधियों[2,6] द्वारा मृदा का विश्लेषण किया गया। प्राप्त परिणाम सारणी 1 में दिए गए हैं। पौधे की वृद्धि के साथ इसमें पुष्प, फल तथा बीज का भी आकलन किया गया। सारणी 2 में प्राप्त परिणाम दर्शाए गये हैं।

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 2 के आँकड़ों से विदित होता है कि **कैलोनिक्सन म्यूरीकेटुम** की सबसे अधिक वृद्धि उर्रहट में होती है। इस पौधे की सबसे कम वृद्धि वानस्पतिक उद्यान, शासकीय विज्ञान महाविद्यालय में देखी गयी। प्रति पौधे पुष्प, फल एवं बीज भी उर्रहट में सबसे अधिक बनते हैं। निपनियाँ में यह पौधा 617 से० मी० लम्बा पाया गया। इस स्थल में इसमें 360 पुष्प बने तथा क्रमश: 301 फल एवं 1050 बीज प्रति पौधे पाए गए। रीवां के अन्य अध्ययन स्थलों-क्रमश: अनन्तपुर, ढेकहा एवं खुटेही में इसकी सामान्य वृद्धि देखी गई।

सारणी 1

मृदा विश्लेषण : रासायनिक गुण

अध्ययन के स्थल	पी-एच०	विद्युच्चालकता mmho/cm	कार्बनिक कार्बन %	P_2O_5 kg/ha.	K_2O kg/ha.	मृदा N kg/ha.
अनन्तपुर	8.3	0.62	0.83	9.90	1090.55	289.84
वानस्पतिक उद्यान	8.5	0.92	0.38	26.40	982.77	169.24
ढेकहा	8.2	0.60	0.60	18.90	749.92	235.00
खुटेही	8.5	0.82	0.44	3.30	310.12	139.12
निपनिया	7.5	0.84	0.92	29.80	392.05	321.50
उर्रहट	8.0	0.40	0.49	29.70	594.40	209.52

सारणी 2

रीवां के विभिन्न स्थलों में कैलोनिक्सन म्यूरीकेटुम की वृद्धि तथा प्रति पौधे पाए गए पुष्प, फल एवं बीज

अध्ययन के स्थल	पौधे की ऊँचाई (सेमी०)	प्रति पौधे फूलों की संख्या	प्रति पौधे फलों की संख्या	प्रति पौधे बीजों की संख्या
अनन्तपुर	605	325	251	880
वानस्पतिक उद्यान	347	220	102	360
ढेकहा	531	265	231	810
खुटेही	391	180	142	496
निपनिया	617	360	301	1050
उर्रहट	729	389	358	1165

पौधों की वृद्धि का अध्ययन दूसरे कार्यकर्ताओं द्वारा भी किया गया है[3–5]। सिंह[5] ने अनन्तपुर एवं ढेकहा में कुँदरू (*Coccinia indica*) की अच्छी वृद्धि देखी। *Solanum khasinum* Clark की वृद्धि अम्लीय मृदा में अच्छी होती है. (गुप्ता तथा बसु[3])।

यह देखा गया है कि नाइट्रोजन एवं फास्फोरस की उपयुक्त मात्रा तथा सामान्य पी-एच० में इस पौधे की अच्छी वृद्धि होती है, जबकि नाइट्रोजन एवं कार्बन की मात्रा कम होने पर कम वृद्धि होती है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय डॉ० हाकिम सिंह, प्राध्यापक, शासकीय महाविद्यालय, सीधी (म० प्र०) के अमूल्य सुझावों के लिए हृदय से आभारी हैं।

निर्देश

1. द्विवेदी, एस० एन०, *Curr. Sci.*, 1916, **55**, 801-802.
2. दत्ता विश्वास, एन० आर०, Operation Mannual, 1971, Mobile soil testing lab. Dicreatorate of Extension, Ministry of Agriculture, New Delhi.
3. गुप्ता, यू० तथा बसु, पी० के०, GEOBIOS, 1982, 9, 74-75.
4. लिओपोल्ड, ए० सी० तथा क्राइडेमान, पी० ई०, Plant Growth and Development, 1975 Tata McGraw Hill, New Delhi.
5. सिंह, एच०, **पी-एच० डी० थीसिल**, ए० पी० एस० यूनिवर्सिटी, रीवां (म० प्र०), 1979.
6. पाइपर, सी० एस०, Soil and Plant Analysis, 1944, A monogr. from Wait. ***Agri. Res. Inst. Univ.***, Adelaide Press Adelaide.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 31. No. 1, 1988

पूर्ण मीटरी अवकाश में तीन मानचित्रों के लिए उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु

गीता चौरसिया

शासकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय, नरसिंहपुर (म० प्र०)

[प्राप्त—अक्टूबर 21, 1987]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में तीन स्वतो मानचित्रों के लिए एक एक स्थिर बिन्दु प्रमेय सिद्ध की गई है जिससे फिशर के परिणाम[1] का सार्वीकरण हो जाता है ।

Abstract

Common fixed points for three maps in a complete metric space. *By* Geeta Chourasia, Government P. G. College, Narsinghpur (M. P.).

In this paper a fixed point theorem for three self mappings has been proved which generalized the result of Fisher [1].

राव तथा राव [2] ने फिशर[1] के परिणाम को तीन स्वतो मानचित्रों के लिए प्रयुक्त किया है । हम इस प्रपत्र में फिशर के परिणाम का एक अन्य सार्वीकरण देंगे ।

मुख्य परिणाम

प्रमेय : माना कि (X, d) पूर्ण मीटरी अवकाश है । माना कि S, T एवं $P : X \to X$ निम्नलिखित प्रतिबन्धों की तुष्टि करते हैं—

$$\begin{aligned}[d(SPx, TPy)]^2 \leqslant\ & a\, d(SPx, TPy)\, d(x, y) \\ & + b\, d(x, SPx)\, d(y, TPy) \\ & + c\, d(x, TPy)\, d(y, SPx) \qquad (1.1)\end{aligned}$$

समस्त $x, y \in X$, जहाँ a, b तथा $c \geqslant 0$ और साथ ही $(a+b) < 1$ एवं $(a+c) < 1$. आगे यह भी मान लें कि या तो $SP=PS$ या $TP=PT$ तो S, T तथा P में X पर एक अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु हैं।

उपपत्ति : माना कि $x_0 \in X$। हम $\{x_n\}$ अनुक्रम की परिभाषा निम्न प्रकार करेंगे।

$$x_{2n+1}=SPx_{2n},\ n=0, 1, 2 \ldots$$

$$x_{2n}=TP_{2n-1},\ n=1, 2 \ldots$$

अब

$$[d(x_{2n+1}, x_{2n})]^2=[d(SPx_{2n}, TPx_{2n-1})]^2$$

$$\leqslant ad(x_{2n+1}\ x_{2n})\ d(x_{2n}, x_{2n-1})$$

$$+\ bd(x_{2n}, x_{2n+1})\ d(_{2n-1}, x_{2n})$$

$$+\ cd(x_{2n}, x_{2n})\ d(x_{2n-1}, x_{2n+1})$$

$$\leqslant d(x_{2n}, x_{2n+1})\ [(a+b)\ d(x_{2n-1}, x_{2n})]$$

अतएव

$$d(x_{2n+1}, x_{2n-})\leqslant kd(x_{2n}, x_{2n}) \qquad [\because\ k=(a+b) < 1].$$

इसी तरह

$$d(x_{2n-1}, x_{2n})\leqslant kd(_{2n-2}, x_{2n-1})$$

अतएव $\{x_n\}$ कौशी अनुक्रम है X का। चूँकि X पूर्ण है अतएव $z \in X$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि

$$\lim_{n\to\infty} x_n=z$$

(1.1) के द्वारा

$$[d(SPz, x_{2n-1})]^2=[d(SPz, TPx_{2n-1})]^2$$

$$\leqslant ad(SPz, TPx_{3n-1})\ d(z, x_{2n-1})$$

$$+\ bd(z, SPz)\ d(x_{2n-1}, TPx_{2n-1})$$

$$+\ cd(z, TPx_{2n-1})\ d(x_{2n-1}, SPz)$$

$n\to\infty$ मानने पर

$$[d(SPz, z)]^2\leqslant 0 \text{ अर्थात् } SPZ=z$$

इसी तरह $d(x_{2n+1}, TPz)]^2$ पर विचार करने पर हम (1) से निष्कर्ष निकालते जिसमें $n\to\infty$ मानते हैं जिससे $TPZ=z$

इस प्रकार

$$SPz=z=TPz\ \ldots \tag{1.2}$$

यही नहीं, इसका यह भी अर्थ होता है z अद्वितीय उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु है SP तथा TP का।

यदि $SP=PS$

तो $[d(Pz, z)]^2=[d(PSPz, TPz)]^2=[d(SPPz, TPz)]^2$

$$\leqslant ad(Pz, z)\, d(Pz, z) + bd(Pz, Pz)\, d(z, z)+cd(z, Pz)\, d(z, Pz)$$

अर्थात्

$$(l-a-c)\,[d(Pz, z)]^2 \leqslant 0$$

जिसका अर्थ यह है कि

$$Pz=z.$$

अतएव (1.2) से

$$Tz=z=Sz.$$

इसी प्रकार यदि

$$PT=TP$$

तो $Pz=z=Sz=Tz$.

(1.1) से उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु की अद्वितीयता प्राप्त होती है। इस तरह उपपत्ति पूर्ण हुई।

टिप्पणी : $a=0$ तथा $P=I$ मानने पर (X पर तत्समक मानचित्र) हमें फिशर[1] का परिणाम प्राप्त होता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखिका डा० एच० एस० गौड विश्वविद्यालय सागर के गणित विभाग के अध्यक्ष डा० पी० एल० शर्मा के प्रति उनके सुझावों के लिए कृतज्ञता ज्ञापित करती है।

निर्देश

1. फिशर, बी०, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 1977, **5**, 319.
2. राव, आई० एच० एन० तथा राव, के० पी० आर०, Bull. Cal. Math. Soc. 1984, **76**, 228-230.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 31. No. 1, 1988

वन्य प्राणी एवं सड़क दुर्घटनायें

सतीश कुमार शर्मा
वन चेतना केन्द्र, गुलाब बाग, उदयपुर

[प्राप्त—सितम्बर 1, 1987]

सारांश

आधुनिक सभ्यता के विकास के साथ-साथ सड़कों की लम्बाई तथा उन पर चलने वाले वाहनों की संख्या में उत्तरोत्तर वृद्धि हो रही है। सड़क पर चलने वाले वाहनों से दुर्घटनाग्रस्त होकर वन्य-प्राणियों की एक बड़ी संख्या प्रतिवर्ष नष्ट हो जाती है। यह साधारण सी बात निकट भविष्य में एक समस्या बन सकती है।

Abstract

Wild animals and road accidents. *By* Satish Kumar Sharma, Van Chetna Kendra, Gulab Bagh, Udaipur.

Length of roads and number of vehicles running on them are gradually shooting up along with the progress of modern civilization. A large number of wild animals are dying in road accidents annually. This ordinary thing may pose a serious problem for our conservation programme in near future.

प्रस्तुत अध्ययन मई 1980 से अप्रैल 1981 तक राजस्थान प्रान्त के पूर्वी जिले भरतपुर में राष्ट्रीय उच्च मार्ग नं० 11 पर हलैना गाँव के पास किमी० 88 से किमी० 93 के माध्य 5 किमी० लम्बी सड़क पर किया गया।

अध्ययन वर्ष में औसतन 11 वाहन प्रति घन्टा इस सड़क पर आते-जाते थे। वाहनों का यह औसत 92 किमी० पत्थर पर लिया गया। मार्ग की औसत चौड़ाई 670 सेमी० नापी गई जिस पर दो वाहन एकसाथ निकल सकते थे।

रोड पर चलने वाले वाहनों में ट्रक, टैंकर, बस, जीप, जोंगा, कार, मोटरसाइकिल, स्कूटर आदि ईंधनचालित वाहनों से होने वाली दुर्घटनाओं पर ही ध्यान केन्द्रित किया गया।

अध्ययन क्षेत्र की पारिस्थितिक विशेषताएँ :

राष्ट्रीय उच्च मार्ग 11 पर किमी० 88-93 में सार्वजनिक निर्माण विभाग द्वारा लगाये गये प्रौढ़ (कम से कम 50 वर्ष से बड़े) इमली तथा नीम के वृक्षों के अलावा 1977 के आस-पास के नवरोपित सफेदा, बबूल, करंज, बकायन, शीशम, गुलमोहर आदि के वृक्ष भी सड़क के दोनों तरफ उगे हुये हैं। पुराने प्रौढ़ वृक्षों में खोखलों की बहुतायत है जिनमें तोते, उल्लू आदि पक्षी निवास करते हैं। वृक्षों पर पक्षियों के घोंसले जगह-जगह देखे गये।

आस-पास खेतों में कृषि कार्य किया जाता है। खरीफ में बाजरा, ज्वार, मूँगफली, उर्द, मूंग, तिल्ली आदि बोई जाती है तथा रबी में गेहूँ, जौ, सरसों आदि बोया जाता है। बाँधों के निचले हिस्से में वर्षा काल में धान बोया जाता है।

सड़क के दोनों ओर जगह-जगह मिट्टी उठा लेने से गड्ढे बने हुये हैं जिनमें वर्षाकाल में पानी इकट्ठा हो जाता है। सड़क के पास ही किमी 90-91 के मध्य हलैना लोअर तथा हलैना अपर बाँध हैं जिनमें वर्षा काल में पानी इकट्ठा होता है। वर्षाकालिक इन सभी खुले जलस्रोतों में अनेक जलपक्षी भोजन की तलाश में आते हैं। प्रसिद्ध घना पक्षी-विहार भी अध्ययन क्षेत्र से 35 किमी० दूर है।

यह एक समतल क्षेत्र है। आस-पास कोई पर्वत नहीं है। भूमि अपेक्षाकृत नीची है जहाँ वर्षा में जल-मग्न की स्थिति प्रायः आ जाती है। भूमि में लवणों की मात्रा अधिक होने से आस-पास कुछ ऊसर भूमि भी विद्यमान है।

अध्ययन प्रक्रिया :

लगातार एक वर्ष तक दुर्घटनाग्रस्त वन्य प्राणियों को पांच किलोमीटर लम्बी सड़क पर गिना गया। रोजाना दिन में तीन बार, सुबह 7.30 बजे, दोपहर 12.00 बजे तथा संध्या 6.00 बजे दुर्घटनाग्रस्त वन्य प्राणियों को देखने के लिये किमी० 88 से साइकिल पर या पैदल रवाना होकर 93 किमी० पत्थर तक यात्रा की गई। सड़क तथा सड़क के दोनों ओर 50—50 फुट की दूरी तक मृत एवं घायल वन्यप्राणियों को खोजा गया। सड़क से 50—50 फुट दोनों ओर खोज इसलिये की गई क्योंकि कई बार टक्कर खाकर प्राणी सड़क से दूर जाकर गिरे थे।

जो वन्य प्राणी हल्की चोट खाकर बचकर भागने में सफल हो जाते थे वे गिनती में शामिल नहीं हो पाये हैं। हां, जिन्हें भागते देखा गया उन्हें शामिल कर लिया गया है। लेकिन इस तरह से बच कर निकलने वाले प्राणियों की संख्या बहुत कम रही। सर्वाधिक संख्या मरने वाले एवं गम्भीर रूप से घायल होकर वहीं आस-पास गिर कर तड़प-तड़प मरने वाले वन्य प्राणियों की रही।

दुर्घटना सर्वेक्षण में अपृष्ठधारी प्राणियों को शामिल नहीं किया गया है। पृष्ठवंशी पर ही सारा ध्यान केन्द्रित किया गया है, परन्तु मनुष्य को इसमें शामिल नहीं किया गया है। कुछ प्राणी जैसे पालतू, आवारा तथा अर्द्धआवारा कुत्ते, गाय, भैंस आदि वन्य प्राणी न होते हुये भी इन्हें अध्ययन में शामिल किया गया है।

दुर्घटनाग्रस्त वन्य प्राणियों का विवरण :

पृष्ठधंशियों के चार वर्गों—उभयचारी, सरीसृपों, पक्षियों एवं स्तनधारियों के उन अभागे प्राणियों की संख्या का ब्यौरा नीचे दिया जा रहा है जो अध्ययन वर्ष में चयनित सड़क दूरी पर मारे गये।

उभयचारियों (Amphibians) की सड़क दुर्घटनायें :

उभयचारी प्राणी शीत रक्त वाले प्राणी होते हैं अतः इन प्राणियों का दुर्घटना-चक्र विशेष किस्म का होता है। वास्तव में जल में तथा नम क्षेत्रों में रहने के कारण इनकी दुर्घटनायें इन्हीं निवासों के आस-पास ज्यादा होती हैं। सारणी 1 में प्रौढ़ उभयचारियों का दुर्घटना चक्र दिखाया गया है

सारणी 1

N. H. 11 किमी० 88 से 93 (5 किमी०)

माह	दुर्घटनाग्रस्त रोड Bufo melanostictus	दुर्घटनाग्रस्त मेंढक Rana tigerina	दुर्घटनाग्रस्त कुल प्राणी
1	2	3	4
मई 1980	0	0	0
जून 1980	0	0	0
जुलाई 1980	0	4	4
अगस्त 1980	3	1	4
सितम्बर 1980	10	10	20
अक्टूबर 1980	0	14	14
नवम्बर 1980	0	0	0
दिसम्बर 1980	0	0	0
जनवरी 1981	0	0	0

1	2	3	4
फरवरी 1981	0	0	0
मार्च 1981	0	0	0
अप्रैल 1981	0	0	0
योग 12 माह	13	29	42
वास्तविक माह जिनमें दुर्घटनायें हुई	2	4	4
औसत दुर्घटनायें प्रति वास्तविक दुर्घटना माह	6.5 प्राणी/माह	7.25 प्राणी/माह	10.5 प्राणी/माह
औसत दुर्घटनायें प्रतिमाह	1.08 प्राणी/माह	2.41 प्राणी/माह	3.5 प्राणी/माह

उभयचारियों की सड़क दुर्घटनाओं की विशेषताएँ :

(1) उभयचारियों की सड़क दुर्घटनाओं में सर्वाधिक मृत्यु जुलाई से अक्टूबर तक वर्षाकाल में होती है। इसी समय ये प्राणी प्रजनन भी करते हैं। शीत निष्क्रियता एवं ग्रीष्म निष्क्रियता की वजह से सर्दी तथा गर्मी में ये प्राणी भूमिगत रहते हैं अतः इन मौसमों में इनकी सड़क दुर्घटनाओं में मृत्यु दर शून्य तक पहुँच जाती है।

(2) सड़क के दोनों ओर मिट्टी उठाने से बने गड्ढों में वर्षा में पानी भर जाता है। ये छोटे-छोटे जलाशयनुमा गड्ढे उभयचारियों को आवास, भोजन क्षेत्र एवं प्रजनन क्षेत्र प्रदान करते हैं। सड़क के दोनों तरफ के गड्ढों में सहज भाव से स्थानान्तरण करते समय कुछ प्राणी दुर्घटनाग्रस्त हो जाते हैं।

(3) सड़कें कोलतार की बनी होती हैं अतः काले रंग की वजह से ये दिन भर सूर्य विकिरणों को अवशोषित कर गर्म हो जाती हैं। रात्रि को ये सड़कें धीरे-धीरे उष्मा उत्सर्जित करती हैं और देर रात ठंडी हो पाती हैं। उभयचारी प्राणी, जो शीत रक्त वाले होते हैं, उष्मा पाने के लिये रात में सड़क पर आ जाते हैं और वाहनों के नीचे मरते रहते हैं।

(4) तेज वर्षा होने पर सड़क जलमग्न हो जाती है। ऐसी अवस्था में आस-पास के गड्ढों का पानी सड़क से होकर बहने लगता है। बहते पानी में उभयचारी भी होते हैं जो सड़क पर बहने के समय वाहनों की चपेट में आ जाते हैं।

सरीसृपों (Reptiles) की सड़क दुर्घटनायें :

सरीसृपों की सड़क दुर्घटनायें सारणी 2 में प्रदर्शित की गई हैं।

सरीसृपों की सड़क दुर्घटनाओं की विशेषतायें :

(1) सरीसृप भी शीत रक्त वाले प्राणी हैं अतः सर्दियों में शीतनिष्क्रियता (winter sleep) पर जाने की वजह से नवम्बर से मार्च तक लगभग दुर्घटनायें न के बराबर होती हैं परन्तु अप्रैल से अक्टूबर तक सर्वाधिक दुर्घटनायें होती हैं।

(2) वर्षाकाल में सर्वाधिक सरीसृप दुर्घटनाग्रस्त होते हैं क्योंकि इस समय सरीसृपों की गतिविधियाँ तेज हो जाती हैं। विशेषकर कछुये तथा जलसाँप सड़क के दोनों तरफ के गड्ढों में पानी इकट्ठा हो जाने से सड़क के पास निवास करने लगते हैं तथा गड्ढों में स्थानान्तरण के दौरान सड़क पार करते समय कुचले जाते हैं।

(3) सड़कें कोलतार की बनी होने से दिन में अपने काले रंग की वजह से सूर्य की उष्मा अवशोषित करती हैं तथा रात में देर तक गर्म रहती हैं। ठंडे रक्त वाले सरीसृप उष्मा पाने के लिये सड़क पर आ जाते तथा रात को कुचले जाते हैं।

(4) सरीसृपों की सम्पूर्ण लम्बाई पृथ्वी के समान्तर रहती है अतः ये काफी चौड़ाई तक फैले रहते हैं। सड़क पार करते समय ये अपने क्षैतिज लम्बे शरीर से काफी चौड़ाई तक फैले रहते हैं अतः वाहनों का दाँया या बांया या दोनों पहियों का युग्म उन्हें कुचल सकता है। उनका लम्बा शरीर सड़क पार करने में काफी समय लेता है जो उनकी मौत में महत्वपूर्ण भूमिका अदा करता है।

(5) साँप जैसे सरीसृपों को खतरनाक समझने का भ्रम आम जनता में व्याप्त है। सांपों पर वाहन चालक एवं आम जनता कोई दया-भाव प्रदर्शित नहीं करते। सड़क पर दिन या रात में सर्प नजर आने पर भले ही वह बच निकलने की स्थिति में हो या बचाया जा सकता हो, ड्राइवर लोग अक्सर जानबूझकर उसे कुचलते हैं। अधिकांश वाहनचालक सांपों जैसे जहरीले प्राणियों को कुचलकर मारने में कोई बुराई नहीं मानते।

(6) सरीसृपों में सर्वाधिक मरने वालों में जलसांप तथा कछुये रहे। दोनों का सम्बन्ध सड़क के दोनों ओर के पानी भरे गड्ढों से है। कछुये अपनी धीमी चाल से सड़क पार करने में काफी समय लेते हैं अतः सांपों के मुकाबले बहुत कम लम्बा शरीर होने पर भी मारे जाते हैं। बहुत से वाहन-चालकों में यह धारणा है कि कछुओं का पृष्ठतल अभेद्य होता है अतः उसकी मजबूती परखने के लिये वे जानकर वाहन का टायर उस पर से गुजारते हैं एवं कछुआ चकनाचूर हो जाता है।

(7) सांपों की आंखों पर पलकें न होने से शायद वे रात में चकाचौंध होकर ठीक से बचने का प्रयास नहीं कर पाते। कान न होने के कारण वाहनों का दूर से शोर भी वे नहीं सुन पाते। वाहन के समीप आ जाने पर सड़क में से होकर संचारित होने वाली ध्वनि तरंगों का कुछ आभास उन्हें हो पाता है लेकिन तब तक काफी विलम्ब हो चुका होता है। इस समय यदि प्राणी बचने का प्रयास कर सड़क की लम्बाई के 90° पर रास्ता ढूंढ़ कर भागता है तो यह सबसे छोटा रास्ता होने से बचने की कुछ संभावना रहती है परन्तु यदि वह सड़क के समान्तर या न्यूनकोण बनाकर भागता है तो निस्संदेह सड़क

सारणी 2

N. H. 11 किमी० 88 से 93 (5 किमी०)

दुर्घटनाग्रस्त प्राणियों के नाम → / माह ↓	X-enochrophis piscator जल-सांप	Calotes versicolor गिरगिट	Hemidactylus Havivisidis छिपकली	Trionyx gangeticus (?) कछुआ	Eryx johni दुमुहा	Vipera russell धोबिया, वाइपर	Naja naja कोबरा	unidentified Snake अन्य सांप	योग
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
मई 1980	0	0	0	0	2	0	0	0	2
जून 1980	4	0	1	1	0	0	0	0	6
जुलाई 1980	9	2	0	6	1	0	0	0	18
अगस्त 1980	3	0	0	2	0	0	1	3	9
सितम्बर 1980	9	0	0	1	2	6	1	0	19
अक्टूबर 1980	9	2	0	2	1	4	2	2	22
नवम्बर 1980	0	1	0	0	0	0	0	0	1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
दिसम्बर 1980	0	1	0	0	0	0	0	0	1
जनवरी 1981	0	0	0	0	0	0	1	0	1
फरवरी 1981	0	1	0	0	0	0	0	0	0
मार्च 1981	1	1	0	0	0	0	0	0	2
अप्रैल 1981	1	0	0	0	0	0	0	0	1
योग 12 माह →	36	8	1	12	6	10	4	5	82
वास्तविक माह जिनमें दुर्घटनायें हुई	7	6	1	5	4	2	3	2	11
औसत दुर्घटनायें प्रति वास्तविक दुर्घटना माह	5.14 प्राणी/माह	1.33 प्राणी/माह	1.0 प्राणी/माह	2.4 प्राणी/माह	1.5 प्राणी/माह	5.0 प्राणी/माह	1.33 प्राणी/माह	2.5 प्राणी/माह	7.45 प्राणी/माह
औसत दुर्घटनायें प्रति माह	3.0 प्राणी/माह	0.66 प्राणी/माह	0.08 प्राणी/माह	1.00 प्राणी/माह	0.5 प्राणी/माह	0.83 प्राणी/माह	0.33 प्राणी/माह	0.41 प्राणी/माह	6.83 प्राणी/माह

पार करने में उसे अधिक समय लगता है फलतः दुर्घटना की संभावना बढ़ जाती है। सड़क के समान्तर चलने पर यदि वह दोनों टायरों के मध्य रहता है तो बच जाता है।

पक्षियों की सड़क दुर्घटनायें :

पक्षियों की सड़क दुर्घटनायें सारणी 3 में प्रदर्शित हैं।

पक्षियों की सड़क दुर्घटनाओं की विशेषतायें :

(1) सड़क दुर्घटनाओं से सर्वाधिक मौतें पक्षियों की होती हैं। अन्य प्राणी केवल पैरों से गति करते हैं जबकि पक्षियों में गति के दो साधन हैं—पैर तथा पंख। अतः इनकी क्रियाशीलता अधिक होने से न केवल सड़क पर चुगते हुये बल्कि उड़कर सड़क पार करते हुये भी पक्षी मारे जाते हैं।

(2) गर्म रक्त वाले प्राणी होने के कारण पक्षी साल भर क्रियाशील रहते हैं अतः साल भर ही समान रूप से ये दुर्घटना में रहते हैं परन्तु वर्षा में मरने वाले पक्षियों की संख्या सर्वाधिक होती है। वर्षा में कीट-पतंगों की संख्या अधिक हो जाती है जो दुर्घटना में मर कर सड़क पर गिरते रहते हैं। साथ ही वर्षा में उभयचारी एवं सरीसृप भी सड़क दुर्घटनाओं में अधिक मरते हैं। मांसाहारी पक्षी सड़कों पर या सड़कों के पास बड़े दुर्घटनाग्रस्त अन्य प्राणियों को खाने के प्रयत्न में स्वयं दुर्घटनाग्रस्त हो जाते हैं।

(3) मंडियों को जाने वाले वाहन अनाज के दाने सड़कों पर फैला जाते हैं जिन्हें खाने के लोभ से कई पक्षी सड़क पर आते हैं एवं दुर्घटनाग्रस्त होकर मारे जाते हैं।

(4) आंधी-तूफान, कोहरे आदि में पक्षियों का स्वयं की उड़ान पर नियन्त्रण कम हो जाता है तथा आस-पास के दृश्य को वे ठीक से देख भी नहीं पाते एवं दुर्घटनाग्रस्त हो जाते हैं।

(5) सड़कों के किनारे की बिजली लाइन तथा टेलीफोन लाइन पक्षियों को बैठने का स्थान प्रदान करती है। इस स्थान का उपयोग करने के लिये भी पक्षी सड़क की तरफ आकर्षित होते हैं एवं सड़क पार करते समय कुचलकर या टकराकर मारे जाते हैं।

(6) सड़कों के किनारे वृक्षों की टहनियों पर तथा कोटरों में भी कई किस्म के पक्षी न केवल निवास करते हैं बल्कि प्रजनन भी करते हैं। इस उद्देश्य से बार-बार पक्षियों को इधर-उधर आना-जाना पड़ता है एवं उनके दुर्घटनाग्रस्त होने की संभावना बराबर रहती है। सड़कों के किनारे खड़े फलदार वृक्ष भी कई पक्षियों को आकर्षित करते हैं।

(7) सड़कों के किनारे गड्ढों में पानी भरने पर वे कई जलीय पक्षियों को अपनी ओर आकर्षित करते हैं। बड़े जलाशयों का सड़क के आस-पास होने पर भी अन्य पक्षियों की उड़ाने पानी पीने हेतु तथा जलीय पक्षियों की उड़ाने भोजन हेतु जलाशय की तरफ होती हैं। यदि उड़ाने सड़क पार करके होती हैं तो दुर्घटना की संभावना बनी रहती है।

सारणी 3

N. H. 11 पर किमी० 88 से 93 तक 5 किमी० लम्बे रोड पर पक्षियों की दुर्घटनायें

दुर्घटनाग्रस्त पक्षियों के नाम→ / माह ↓	Bubulcus ibis बगुला	Pseudibis papillosa काला बाजा	Accipiter badius शिकरा	Gyps bengalensis गिद्ध	Neodhron percnopterus चील, सफेद, गिद्ध	Francolinus pondicerianus तीतर	Pavo cristatus मोर	Grus antigone सारस	Columba livia कबूतर	Streptopelia decaocta फाख्ता	Psittacula kramer तोता	Centropus sinensis महोक	Athene brama उल्लू	Merops orientalis पतिंगा	Coracias benghalensis नीलकंठ	Upupa epops हुद-हुद	Picoides mahratteensis कठफोड़वा	Dicrurus adslmilis भुजंगा	Acridotheres tristis देशी मैना	Corvus splendens कौवा	Pycnonotus cafer बुलबुल	Turdoides striatus सतभईया	Orthotomus satorius दर्जिन	Saxicola Caprata काला पिद्दा	Saxicoloides fulicata कलचुरी	Pssser domesticus गोरैया	Total योग
मई 1980					1							1															2
जून 1980				1						1													1				3
जुलाई 1980				1			2								1		1				1						6
अगस्त 1980				1			1			4	1				1				4	4		1					17
सितम्बर 1980	3			4			1			9	3			1	1	3	1	1	3	12					1	1	44
अक्टूबर 1980	2	4		3		1	1	1	1	10	6			1					6	7					2	1	46
नवम्बर 1980				2	1		4			4	4	1							3							1	20
दिसम्बर 1980					1		2			10										1		1				2	17
जनवरी 1981			1				1			8	1											1			1		13
फरवरी 1981				3	1		1			8	1	1		1					1	1		1				3	22
मार्च 1981				2			2			6									2						1	4	17
अप्रैल 1981				2		1				6			1											1		1	12
योग 12 माह→	5	4	1	19	4	2	15	1	1	66	16	3	1	3	3	3	2	1	19	25	1	4	1	1	5	13	219
वास्तविक माह जिनमें दुर्घटनायें हुई	2	1	1	9	4	2	9	1	1	10	6	3	1	3	3	1	2	1	6	5	1	4	1	1	4	7	12
औसत दुर्घटनायें प्रति वास्तविक दुर्घटना माह (प्राणी/माह)	2.5	4	1	2.11	1	1	1.66	1	1	0.6	2.6	1	1	1	1	3	1	1	3:16	5.0	1	1	1	1	1.25	1.08	18.25
औसत दुर्घटनायें प्रति माह (प्राणी/माह)	0.41	0.33	0.08	1.58	0.33	0.16	1.25	0.08	0.08	5.5	1.33	0.25	0.08	0.25	0.25	0.25	0.16	0.8	1.58	2.08	0.08	0.33	0.08	0.08	0.41	1.08	18.25

उपरोक्त के अलावा दो पालतू मुर्गे भी दुर्घटना में मरे।

(8) प्रस्तुत अध्ययन में सर्वाधिक मरने वाला पक्षी फाख्ता था जिसकी औसत मृत्यु दर 5.5 पक्षी प्रतिमाह प्रति 5 किमी० रही। मोर, देशी मैना, कौवा, गिद्ध तथा गोरैया अधिकता मे मरने वाले अन्य पक्षी थे। मोर, मैना तथा गौरैया प्रायः अन्न कणों एवं कौवा गिद्ध दुर्घटनाग्रस्त प्राणियों का मांस खाने के प्रयत्न में मारे गये। मरने वाले मोरों में नर मोर अधिक थे जो अपनी लम्बी पूंछ की वजह से टकरा कर मारे गये।

(9) कौवों में मरने वाले 95% युवा पक्षी थे जो हाल में ही घोंसला छोड़कर बाहर आये थे तथा वाहनों से बचने में निपुण नहीं हो पाये थे। युवा कौवे अनुभव की कमी से दुर्घटनाग्रस्त होते पाये गये।

स्तनधारियों की सड़क दुर्घटनायें :

स्तनधारियों की सड़क दुर्घटनायें सारणी 4 में प्रदर्शित की गई हैं।

स्तनधारियों की सड़क दुर्घटनाओं की विशेषतायें :

(1) सड़क पर एवं सड़क के आस-पास मृत जानवरों को खाने के प्रयत्न में कुत्ते, गीदड़, नेवले आदि मांसीहारी मारे जाते हैं।

(2) उष्माकाल में कुत्तों में संयोग के लिये बेचैनी होती है। मादा की तलाश तथा अन्य नरों को हराकर मादा पर एकाधिकार जमाने के लिये प्रतिद्वन्द्वी तरंग की तरह दौड़ते रहते हैं तथा वाहनों की चपेट में आते रहते हैं। मानव आबादी के पास सर्वाधिक कुत्ते दुर्घटनाग्रस्त होते हैं।

(3) रात में गीदड़, खरहे, जंगली बिल्ली आदि की आँखें वाहनों की रोशनी में चकाचौंध हो जाती हैं एवं वे बचने में त्रुटि कर जाते हैं तथा दुर्घटनाग्रस्त हो जाते हैं।

(4) सड़कों के दोनों ओर वन विभाग द्वारा किये जा रहे वृक्षारोपण की सुरक्षा हेतु काँटेदार तार या किसी अन्य तरह की बाड का उपयोग किया जाता है। आपत्ति आने पर बाड वाहन का सामना करने वाले प्राणी को तेजी से बचकर भागने में रोकती है।

(5) कुछ वाहनचालक शौकिया तौर पर या अन्य मानसिक दबाव में रहते हुये गलतियाँ करते हैं तथा कई दुर्घटनाओं को जन्म देते हैं।

(6) पशु सड़क की पटरियों पर चरते हुये दुर्घटना में प्राण गवांते हैं।

(7) गिलहरी तथा नेवले की आदत होती है कि ये अचानक दौड़ना बन्द कर पिछले पैरों पर लम्बवत् खड़े होकर कुछ क्षण रुककर इधर-उधर देखते रहते हैं। सड़क पार करते हुये जब वे बीच सड़क इस प्रकार व्यवहार करते हैं तो सड़क पार करने में अपेक्षाकृत अधिक समय लेते हैं एवं दुर्घटनाओं में फँसते हैं।

(8) कुछ स्तनधारी जैसे गिलहरी सड़क पर पड़े गोबर में से अपच दाने खाने के प्रयत्न में दुर्घटनाग्रस्त हो जाते हैं।

मरने वाले प्राणियों का महत्व :

मरने वाला कोई वन्य प्राणी व्यर्थ की वस्तु नहीं है। प्रकृति में वे बहुत उपयोगी कार्य संपादित कर रहे हैं। उभयचारी बड़ी संख्या में कीट-पतंगों का सफाया कर कृषि-पारिस्थितिकी तन्त्र (Agro-Eco-system) को विघटित होने से बचाते हैं। सरीसृप बड़ी संख्या में कीट-पतंगों तथा अनेकानेक कृन्तकों (Rodents) को खाकर अमूल्य सेवायें करते हैं। पक्षी कीटनियन्त्रण, परागण, प्रकीर्णन से लेकर कई आर्थिक उत्पाद हमें प्रदान करते हैं। स्तनधारी वन्यप्राणियों भी कीटनियन्त्रण, सफाई, परागण, प्रकीर्णन से लेकर कई आर्थिक उत्पाद प्रदान करते हैं। इन प्राणियों के आर्थिक पक्ष पर नहीं बल्कि जैव पारिस्थितिक पक्ष पर हमें सोचना चाहिये।

भारत में वन्यप्राणी दुर्घटनाओं की विपुलता :

आवागमन के तीन मुख्य साधन, सड़क पर चलने वाले वाहनों, रेलों तथा वायुयानों से टकरा कर प्रतिवर्ष लाखों वन्य प्राणियों को जान गँवानी पड़ती है। बसों तथा रेलों से टकराने पर वे मनुष्य को प्रायः प्रत्यक्ष कोई नुकसान नहीं पहुँचाते परन्तु पक्षी कई बार वायुयानों से टकराकर वायुयान को ही दुर्घटनाग्रस्त कर देते हैं।

रेलों तथा वायुयानों को छोड़कर यहाँ सड़क मार्गों पर होने वाली दुर्घटनाओं पर ही विचार किया जायेगा। सन् 1978 में भारत में राष्ट्रीय उच्च मार्गों की लम्बाई 28870 किमी०, राज्य उच्च मार्गों की लम्बाई 57000 किमी०, स्थानीय मार्गों की लम्बाई 155000 किमी० तथा ग्रामीण सड़कों की लम्बाई 360000 किमी० थी। इन मार्गों पर सन् 1978 में 2100000 वाहन दौड़ रहे थे।

प्रस्तुत अध्ययन में राष्ट्रीय उच्च मार्ग न० 11 पर मात्र पांच किलोमीटर लम्बी सड़क पर एक वर्ष में 439 वन्य प्राणी या तो मारे गये या घायल हुये। सहज ही हम सोच सकते हैं भारत में प्रतिवर्ष कितने वन्य प्राणी सड़क दुर्घटाओं में मारे जा रहे हैं। भारत में 1978 में राष्ट्रीय तथा राज्य उच्च मार्गों की लम्बाई 85870 किमी० थी। राष्ट्रीय उच्च मार्गों तथा राज्यो मार्गों पर लगभग समान भीड़-भाड़ रहती है अतः सैद्धान्तिक रूप से यह माना जा सकता है कि राज्य उच्च मार्गों पर भी वन्य प्राणियों की दुर्घटना दर वही है जो राष्ट्रीय उच्च मार्गों पर है। इस परिप्रेक्ष्य में सन् 1978 में राष्ट्रीय तथा राज्य उच्च मार्गों पर ही मात्र एक साल में 7539386 वन्य प्राणी दुर्घटनाग्रस्त हुये। इन आंकड़ों में स्थानीय सड़कों तथा ग्रामीण सड़कों पर दुर्घटनाग्रस्त होने वाले वन्य प्राणी शामिल नहीं हैं।

स्पष्ट है जब सड़कों की लम्बाई तथा वाहनों को संख्या में उत्तरोत्तर वृद्धि हो रही है तो दुर्घटना में मरने वाले वन्यप्राणियों की संख्या में भी वृद्धि होगी। यह एक चिन्ता का विषय है। कई

सड़कें विभिन्न अभ्यारण्यों तथा राष्ट्रीय उद्यानों से भी गुजरती हैं। यदि संरक्षित वन्य प्राणी इन स्थानों में दुर्घटनाग्रस्त होते हैं तो यह और भी चिन्ता की बात है।

कृतज्ञता ज्ञापन

लेखक श्री भजन लाल मीणा, वन रक्षक, बाघ परियोजना, सरिसका का बहुत आभारी है जिन्होंने दुर्घटनाग्रस्त वन्यप्राणियां संबंधी आंकड़े एकत्रित करने में मदद की।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 31, No. 1, 1988

सार्वीकृत समाकल रूपान्तर का नवीन वर्ग और उष्मा चालन के सीमा मान निर्णय में उनका सम्प्रयोग

अशफाकुल्ला सिद्दीकी
इंस्टीट्यूट आफ टेक्नालॉजी, बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी, वाराणसी

[प्राप्त—नवम्बर 11, 1987)

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य बेसेल फलनों की अष्टि वाले सार्वीकृत समाकल रूपान्तर के एक नवीन वर्ग से परिचित कराना है।

Abstract

On a new class of generalised integral transform and their application in boundary value problem of heat conduction. *By* Ashfaqullah, Siddiqui School of Biochemical Engineering, Institute of Technology, B.H. U., Varansi-5.

The aim of this present paper is to introduce a new class of generalized integral transform, involving Bessel functions as kernel. Inversion formula is established and some properties are given. The transform is used in the solution of certain class of mixed boundary value problems of conduction of heat in the concentric hollow cylinder. In the first phase, it is considered that the density ρ of the cylinder is constant and in the second phase, the composite cylinder of variable density $\rho=\rho_0 r^2$ where ρ_0 is a constant has been considered.

1. परिभाषा तथा प्रतिलोमन सूत्र :

हम बेसेल के अवकल समीकरण पर विचार करेंगे

$$x^2y''+[1-2a]xy'+[\lambda^2\beta^2x^{2\beta}+a^2-\gamma^2\beta^2]y=0 \tag{1.1}$$

जिसके प्रतिबन्ध हैं

$$y(a)+h_1y'(a)=0$$

$$y(b)+h_2y'(b)=0 \tag{1.2}$$

जहाँ a तथा b सिलिंडर के आन्तरिक तथा बाह्य त्रिज्याएँ हैं और h_1 तथा h_2 स्वतन्त्र विकिरण अचर हैं।

(1.1) के सामान्य हल को इस प्रकार लिख सकते हैं

$$y(x)=x^{\alpha}[C_1J_\nu(\lambda x^{\beta})+C_2Y_\nu(\lambda x^{\beta})] \tag{1.3}$$

जहाँ C_1 तथा C_2 यादृच्छिक अचर हैं तथा $J_\nu(\lambda x^{\beta})$ एवं $Y_\nu(\lambda x^{\beta})$ क्रमशः प्रथम और द्वितीय प्रकार के बेसेल फलन हैं।

हम(1.1) का ऐसा हल प्राप्त करना चाहते हैं जो प्रतिबन्धों (1.2) को तुष्ट करें।

$$C_1[J_\nu(\lambda a^{\beta})+\frac{h_1}{a}\{\alpha J_\nu(\lambda a^{\beta})+\lambda\beta a^{\beta}J_\nu'(\lambda a^{\beta})\}]$$

$$+C_2[Y_\nu(\lambda a^{\beta})+\frac{h_1}{a}\{\alpha Y_\nu(\lambda a^{\beta})+\lambda\beta a^{\beta}Y'_\nu(\lambda a^{\beta})\}]=0 \tag{1.4}$$

तथा

$$C_1[J_\nu(\lambda b^{\beta})+\frac{h_2}{b}\ \{\alpha J_\nu(\lambda b^{\beta})+\lambda\beta b^{\beta}J'_\nu(\lambda b^{\beta})\}]$$

$$+C_2[Y_\nu(\lambda b^{\beta})+\frac{h_2}{b}\ \{\alpha Y_\nu(\lambda b^{\beta})+\lambda\beta b^{\beta}Y_\nu'(\lambda b^{\beta})\}]=0 \tag{1.5}$$

(1.4) तथा (1.5) से हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{C_1}{C_2}=-\frac{[J_\nu(\lambda a^{\beta})+\frac{h_1}{a}\{\alpha J_\nu(\lambda a^{\beta})+\lambda\beta a^{\beta}J_\nu'(\lambda a^{\beta})\}]}{[Y_\nu(\lambda a^{\beta})+\frac{h_1}{a}\{\alpha Y_\nu(\lambda a^{\beta})+\lambda\beta a^{\beta}Y_\nu'(\lambda a^{\beta})\}]}$$

$$=-\frac{[J_\nu(\lambda b^{\beta})+\frac{h_2}{b}\{\alpha J_\nu(\lambda b^{\beta})+\lambda^{\beta}J_\nu'(\lambda b^{\beta})\}]}{[Y_\nu(\lambda b^{\beta})+\frac{h_2}{b}\ \{\alpha Y_\nu(\lambda b^{\beta})+\lambda\beta b^{\beta}Y_\nu'(\lambda b^{\beta})\}]} \tag{1.6}$$

इस तरह (1.3) से प्राप्त फलन प्रतिबन्धों (1.2) सहित समीकरण (1.1) का हल है, यदि λ_i अबीजीय फलन (transcendental function)

$$[J_\nu(\lambda a^{\beta})+\frac{h_1}{a}\{\alpha J_\nu(\lambda a^{\beta})+\lambda\beta a^{\beta}J_\nu'(\lambda a^{\beta})\}]Y_\nu(\lambda b^{\beta})$$

$$+\frac{h_2}{b}\{aY_\nu(\lambda b^\beta)+\lambda\beta b^\beta Y_\nu'(\lambda b^\beta)\}]$$

$$-[Y_\nu(\lambda a^\beta)+\frac{h_1}{a}\{aY_\nu(\lambda a^\beta)+\lambda\beta a^\beta Y_\nu'(\lambda a^\beta)\}]\;[J_\mu(\lambda b^\beta)$$

$$+\frac{h_2}{b}\{aJ_\nu(\lambda b^\beta)+\lambda\beta b^\beta J_\nu'(\lambda b^\beta)\}]=0 \qquad (1.7)$$

का मूल है । अब निम्नलिखित संकेतनों को प्रविष्ट करेंगे

$$\Phi_{1,\nu}(\lambda a^\beta)=[J_\nu(\lambda a^\beta)+\frac{h_1}{a}\{aJ_\nu(\lambda a^\beta)+\lambda\beta a^\beta J_\nu'(\lambda a^\beta)\}]$$

$$\Phi_{2,\nu}(\lambda a^\beta)=[Y_\nu(\lambda a^\beta)+\frac{h_1}{a}\{aY_\nu(\lambda a^\beta)+\lambda\beta^\beta Y_\nu'(\lambda a^\beta)\}]$$

$$\Omega_{1,\nu}(\lambda b^\beta)=[Y_\nu(\lambda b^\beta)+\frac{h_2}{b}\{aY_\nu(\lambda b^\beta)+\lambda\beta b^\beta Y_\nu'(\lambda b^\beta)\}]$$

$$\Omega_{2,\nu}(\lambda b^\beta)=[J_\nu(\lambda b^\beta)+\frac{h_2}{b}\{aJ_\nu(\lambda b^\beta)+\lambda\beta b^\beta J_\nu'(\lambda b^\beta)\}]$$

अतः (1.7) को निम्नवन् लिखा जा सकता है

$$[J_\nu(\lambda a^\beta)+\phi_{1,\nu}(\lambda a^\beta)]\;[Y_\nu(\lambda b^\beta)+\Omega_{1,\nu}(\lambda b^\beta)]$$
$$-[Y_\nu(\lambda a^\beta)+\Phi_{2,\nu}(\lambda a^\beta)]\;[J_\nu(\lambda b^\beta)+\Omega_{2,\nu}(\lambda b^\beta)]=0 \qquad (1.8)$$

मानाकि $\lambda_i (i=1, 2, ...)$ धनात्मक मूल हैं समीकरण (1.8) के । तो (1.4) तथा (1.5) से हमें

$$y_i(x)=\frac{C_1x^\alpha}{\Phi_{2,\nu}(\lambda_i a^\beta)}\;[J_\nu(\lambda_i x^\beta)\phi_{2,\nu}(\lambda_i a^\beta)-Y_\nu(\lambda_i x^\beta)\phi_{1,\nu}(\lambda_i a^\beta)]$$

तथा

$$y_i(x)=\frac{C_1x^\alpha}{\Omega_{2,\nu}(\lambda_i b^\beta)}\;[J_\nu(\lambda_i x^\beta)\Omega_{2,\nu}(\lambda_i b^\beta)-Y_\nu(\lambda_i x^\beta)\Omega_{1,\nu}(\lambda_i b^\beta)] \qquad (1.9)$$

प्राप्त होगा । तब निम्नलिखित फलन हल हैं समीकरण (1.1) के प्रतिबन्धों (1.2) समेत

$$C_\nu(h_1, h_2, \lambda_i x^\beta)=[\Phi_{2,\nu}(\lambda_i a^\beta)+\Omega_{2,\nu}(\lambda_i b^\beta)]J_\nu(\lambda_i x^\beta)$$
$$-[\Phi_{1,\nu}(\lambda_i a^\beta)+\Omega_{1,\nu}(\lambda_i b^\beta)]Y_\nu(\lambda_i x^\beta) \qquad (1.10)$$

अब स्टर्म-लाऊविले[1] के सिद्धान्त के अनुसार प्रणाली (1.10) के फलन आन्तरिक (a, b) पर भार फलन x समेत लाम्बिक हैं अर्थात्

$$\int_a^b xC_\nu(h_1, h_2, \lambda_i x^\beta)\, C_\nu(h_1, h_2, \lambda_j x^\beta)dx = 0 \quad i \neq j \tag{1.11}$$

$$\int_a^b xC_\nu^2(h_1, h_2, \lambda_i x^\beta)dx = ||C_\nu(h_1, h_2, \lambda_i x^\beta)||^2$$

अब बेसेल फलनों के कतिपय विख्यात गुणों[2] का प्रयोग करने पर हम

$$\begin{aligned} ||C_\nu(h_1, h_2, \lambda_i x^\beta))||^2 = \tfrac{1}{2}M^2 (\lambda_i x^\beta, a, b) \{&b^2 P(\lambda_i x^\beta; b; v) \\ &- a^2 P(\lambda_i x^\beta; a; v)\} - M(\lambda_i x^\beta, a, b) \\ &N(\lambda_i x, a, b) \{b^2 Q(\lambda_i x^\beta, b, v) \\ &- a^2 Q(\lambda_i x^\beta, a, v)\} \\ &+ \frac{N^2}{2}(\lambda_i x^\beta, a, b) \{b^2 R(\lambda_i x^\beta, b, v) \\ &- a^2 R(\lambda_i x^\beta, a, v)\} \end{aligned} \tag{1.12}$$

प्राप्त कर सकते हैं जहाँ

$$\begin{aligned} &M(\lambda_i x^\beta, ab) = \Phi_{1,\nu}(\lambda_i a^\beta) + \Omega_{1,\nu}(\lambda_i b^\beta) \\ &N(\lambda_i x^\beta, a, b) = \Phi_{2,\nu}(\lambda_i a^\beta) + \Omega_{2,\nu}(\lambda_i b^\beta)] \\ &P(\lambda_i x^\beta, \mu, v) = [J_\nu^2(\lambda_i \mu^\beta) - J_{\nu-1}(\lambda_i u^\beta) J_{\nu+1}(\lambda_i \mu^\beta)] \\ &Q(\lambda_i x^\beta, \mu, v) = [J_\nu'(\lambda_i \mu^\beta) Y_{\nu-1}(\lambda_i \mu^\beta) - \frac{1}{\lambda_i \mu^\beta} J\nu_{-1}(\lambda_i x^\beta) Y_\nu(\lambda_i \mu^\beta) \\ &\qquad - J\nu_{-1}'(\lambda_i \mu^\beta) Y_\nu(\lambda_i \mu^\beta)] \\ &R(\lambda_i x^\beta, \mu, v) = [Y_\nu^2(\lambda_i \mu^\beta) - Y_{\nu-1}(\lambda_i \mu^\beta) Y_{\nu+1}(\lambda_i \mu^\beta)] \end{aligned} \tag{1.13}$$

जहाँ

$a, b = \mu$

यदि फलन $f(x)$ तथा इसका प्रथम व्युत्पन्न अन्तराल $[a,b]$ में खण्डशः संतत हो तो सम्बन्ध

$$\begin{aligned} T[f(x), a, b, v; \lambda_i] &= f_\nu(\lambda_i) \\ &= \int_a^b xf(x) C_\nu(h_1, h_2, \lambda_i x^\beta) dx \end{aligned} \tag{1.14}$$

से समाकल रूपान्तर परिभाषित हो जाता है जहाँ λ_i धनात्मक मूल हैं समीकरण (1.8) के। अत प्रतिलोमन सूत्र प्राप्त करने के लिए मानाकि

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty} a_j C_v(h_j, h_2, \lambda_i x^{\beta}) \tag{1.15}$$

इसके दोनों पक्षों में $xC_v(h_1, h_2, \lambda_k x^{\beta})$, ($k$ fixed) मे गुणा करके तथा a एवं b के बीच x के प्रति समाकलित करने पर हमें प्राप्त होगा

$$a_j=\frac{\int_a^b xf(x)C_v(h_1, h_2, \lambda_j x^{\beta})dx}{||C_v(h_1, h_2, \lambda_i x^{\beta})||^2} C_v(h_1, h_2, \lambda_j x^{\beta})$$

$$=\frac{f_v(\lambda_i x^{\beta})}{||C_v(h_1, h_2 \lambda_j x^{\beta})||^2}, j=1, 2, 3.... \tag{1.16}$$

अंत:

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_v(\lambda_j x^{\beta})}{||C_v(h_1, h_2, \lambda_i x^{\beta})||^2} C_v(h_1, h_2, \lambda_j x^{\beta}) \tag{1.17}$$

जहाँ समीकरण (1.8) के सभी धनात्मक मूलों का संकलन लिया जाता है।

2. सार्वीकृत समाकल रूपान्तरों के कुछ गुण

रूपान्तर की परिभाषा से निम्नलिखित गुणों की आसानी से पुष्टि की जा सकती है—

(i) $T[\alpha f(x)+\beta g(x), a, b, v; \lambda_i]$

$$=\alpha T[f(x), a, b, v; \lambda_i]+\beta T[g(x), a, b, v; \lambda_1] \tag{2.1}$$

(ii) $$T[f(ax), a, b, v; \lambda_i]=\frac{1}{a^2}T[f(x), a, b, v; \lambda_i] \tag{2.2}$$

(iii) $$g(x) \text{ का रूपान्तर}=\frac{d^2f}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{df}{dx}-\frac{v}{x^2}f \tag{2.3}$$

मानाकि

$$I=\int_a^b x[f''(x)+\frac{1}{x}f'(x)]C_v(h_1, h_2, \lambda_i x^{\beta})dx$$

$$=\int_a^b xf''(x)C_v(h_1, h_2, \lambda_i x^{\beta})dx+\int_a^b f'(x)C_v(h_1, h_2, \lambda_i x^{\beta})dx$$

$$=\left\{ xC_\nu(h_1, h_2, \lambda_i x^\beta)f'(x) \right\}_a^b - \lambda_1\beta \int_a^b x^\beta C_\nu'(h_1, h_2, \lambda_i x^\beta)f'(x)dx$$

$$-\int_a^b f'(x)C_\nu(h_1, h_2, \lambda_i x^\beta)dx + \int_a^b f'(x)C_\nu(h_1, h_2, \lambda_i x^\beta)dx$$

$$=\left\{x[C_\nu(h_1, h_2, \lambda_i x^\beta)f'(x)] - [\lambda_i \beta x^\beta C_\nu'(h_1, h_2, \lambda_i x^\beta)f(x)]\right\}_a^b$$

$$+\int_a^b x^{-1}[\lambda_i x^{2\beta} C_\nu''(h_1, h_2, \lambda_i x^\beta) + \lambda_i C_\nu'(h_1, h_2, \lambda_i x^\beta)] f(x)dx$$

क्योंकि फलन $C(h_1, h_2, \lambda_i x^\beta)$ बेसेल के अवकल समीकरण को तुष्ट करता है।

हमें ज्ञात है कि

$$\bar{g}_\nu(\lambda_i) = \int_a^b x \left(f'' + \frac{1}{x} f' - \frac{v}{x^2} f\right) C_\nu(h_1, h_2, \lambda_i x^\beta)dx \tag{2.4}$$

$$=\left\{x[C_\nu(h_1, h_2, \lambda_i x^\beta)f'(x)] - [\lambda_i \beta C'(h_1, h_2, \lambda_i x^\beta)f(x)] \right\}_a^b$$

$$-\lambda_1^2 f_\nu f(\lambda_i)$$

जो सरलीकरण के बाद (2.5) प्रदान करता है

$$\bar{g}_\nu(\lambda_i) = \frac{b}{h} C_\nu(h_1, h_2, \lambda_i b^\beta) \left[f + h\frac{df}{dx}\right]_{x=b}$$

$$+\lambda_i a C_\nu'(h_1, h_2, \lambda_i a^\beta) f(a) - \lambda_i^2 f_\nu(\lambda_i) \tag{2.5}$$

(iv) x^ν का रूपान्तर है : परिभाषा के अनुसार

$$T[x^p, a, b, v; \lambda_i] = \int_a^b x^{\nu+1} C_\nu(h_1, h_2, \lambda_i x^\beta)dx$$

परिणाम [2, p.634]

$$\int x^{\rho+1} Z(x)dx = X^{\rho+1} Z_{\rho+1}(x)$$

का प्रयोग करने पर प्राप्त होता है जहाँ $Z_\rho(x)$ एक वेसेल फलन है और सरलीकरण के बाद हमें (2.6) प्रदान करता है

$$T[x^\nu, a, b, v; \lambda_i] = \frac{b^{\nu+1}}{\lambda_i^2} \left[\frac{v}{b} + \frac{1}{h}\right] C_\nu(h_1, h_2, \lambda_i b^\beta)$$

$$+\frac{a^{\nu+1}}{\lambda_i} C_\nu(h_1, h_2, \lambda_i b^\beta) \tag{2.6}$$

(V) **अचर का रूपान्तर** : हम सरलता से प्राप्त कर सकते हैं

$$T[\delta, a, 0, \lambda_i]=\frac{\delta}{\lambda_i^2}\left[\frac{b}{h}C_0(h_1, h_2, \lambda_i b^{\beta})\right]+a\lambda_i C_0(h_1, h_2, \lambda_i a^{\beta}).$$

3. विशिष्ट दशाएँ

यदि हम (1.1) में $\alpha=0$ तथा $\beta=1$ लें तथा (1.2) में $h_1=0$ तो यह ज्ञात परिणाम [3 pp. 149-315) के संगत होगा । इस तरह से (1.1) में प्राचलों के विशिष्टीकरण से अन्य कई दशाएँ भी प्राप्त की जा सकती हैं ।

4. सिलिंडर में उष्मा चालन की समस्या

हम ऐसे सिलिंडर पर विचार करेंगे जिसकी त्रिजयाएँ $a, b,$ ऊँचाई h हैं तथा जो z अक्षि में संमित है । इसके भीतर उष्मा स्रोत है जो ताप का वितरण अक्षीयतः संमित रूप से करता है । माना (r, ϕ, z) सिलिंडरी कोट्यांक प्रणाली है और उष्मा z अक्षि के प्रति संमित रूप से चालित होती है । ताप फलन दिक् तथा काल का फलन है ।

उष्मा चालन समीकरण निम्न प्रकार से लिखा जाता है—

$$\rho c\frac{\partial\theta}{\partial t}=k\nabla^2\theta+\xi(r, z, t, \theta) \tag{4.1}$$

जहाँ $\xi(r, z, t, \theta)$ स्रोत फलन है ।

निम्नलिखित प्रस्थापनों

$$\xi(r, z, t, \theta)=\phi(r, z, t)+\epsilon(t)\theta(r, z, t) \tag{4.2}$$

$$u(r, z, t)=\theta(r, z, t)\exp\left\{-\int_0^t \epsilon(y)dy\right\} \tag{4.3}$$

$$\phi(r, z, t)=\phi(r, z, t)\exp\left\{-\int_0^t \epsilon(y)\,dy\right\} \tag{4.4}$$

का प्रयोग करने पर उष्मा चालन समीकरण (4.1)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\nabla^2 u+\frac{\phi(r, z, t)}{\rho} \tag{4.5}$$

में समानीत हो जाता है जहाँ $k=K/\rho C$, k विसरणशीलता है, K उष्मीय चालकता है ρ घनत्व है और C विशिष्ट उष्मा है तथा सीमा प्रतिबन्ध निम्नवत् हैं

$$\left.\begin{aligned} & u(a, z, t)+h_1 \frac{\partial}{\partial r} u(a, z, t)=\eta_a(z, t) \\ & \qquad \text{समस्त } 0<z<h,\ t>0 \text{ के लिए} \\ & u(b, z, t)+h_2 \frac{\partial}{\partial r} u(b, z, t)=\eta_b(z, t) \\ & \qquad \text{समस्त } 0<z<h,\ t>0 \text{ के लिए} \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

जहाँ h_1 तथा h_2 स्वतन्त्र विकिरण स्थिरांक है । प्रारम्भिक प्रतिबन्ध हैं

$$\left.\begin{aligned} & u(r, h, t)=0 \text{ समस्त } a<r<b,\ t>0 \\ & u(r, o, t)=0 \text{ समस्त } a<r<b,\ t>0 \end{aligned}\right\} \text{ के लिए} \tag{4.7}$$

तथा

$$u(r, z, 0)=u_0(r, z), \text{ समस्त } a<r<b, 0<z<h \text{ के लिए} \tag{4.8}$$

जहाँ $\eta_a(z, t)$, $\eta_b(z, t)$ तथा $u_0(r, z)$ ज्ञात फलन हैं ।

प्रथम अवस्था : मानाकि सिलिंडर का घनत्व ρ स्थिर है । **तब समीकरण (4.5) हो जाता है**

$$K\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\xi(r, z, t)-\frac{\partial u}{\partial t}=0 \tag{4.9}$$

(4.9) में r के प्रति (1.14) को व्यवहृत करने पर तथा $a=0=v$ लेने पर सीमा प्रतिबन्धों के चुनाव के फलस्वरूप

$$K\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}-\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\xi(\lambda_i, z, t)-K\lambda_i^2\bar{u}+k\psi(z, t) \tag{4.10}$$

जहाँ

$$\psi(z, t)=\frac{aC_0(h_1, h_2, \lambda_i a^\beta)\eta_a(z, t)}{h_1}$$

$$-\frac{bC_0(h_1, h_2, \lambda_i b^\beta)\eta_b(z, t)}{h_2}$$

अब **z** के प्रति समीकरण (4.10) में सान्त फूरिये ज्या रूपान्तरण के **सम्प्रयोग से तथा (4.7) के सम्प्रयोग** से हम पाते है

$$\frac{d\bar{u}_s}{dt}+\left(\frac{m^2\pi^2}{h}+\lambda_i^2\right)\bar{u}_s(\eta, m, t)$$

$$=-K\psi_s(m, t)+\xi(\lambda_i, m, t) \tag{4.11}$$

जहाँ

$$\int_0^h \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \sin\left(\frac{m\pi z}{h}\right) dz = -\frac{m^2\pi^2}{h^2}\bar{u}_s(n, m, t)$$

$$\psi_s(m, t) = \int_0^h \psi(z, t) \sin\left(\frac{m\pi z}{h}\right) dz$$

तथा

$$\xi(\lambda_i, m, t) = \int_0^h \xi(\lambda_i, z, t) \sin\left(\frac{m\pi z}{h}\right) dz$$

पुन : समीकरण (4.1) के प्रति लैप्लास रूपान्तर तथा (4.8) का उपयोग करने पर

$$L[\bar{u}_s(n, m, t)] = \frac{[\bar{u}_{0,s}(n, m)]}{\left[p+k\left(\lambda_i^2+\frac{m^2\pi^2}{h^2}\right)\right]} - \frac{kL[\psi_s(m, t)]}{\left[p+k\left(\lambda_i^2+\frac{m^2\pi^2}{h^2}\right)\right]} + \frac{L[\xi(\lambda_i, m, t)]}{\left[p+k\left(\lambda_i^2+\frac{m^2\pi^2}{h^2}\right)\right]} \quad (4.2$$

(4.12) में व्युत्क्रम लाप्लास रूपान्तर का प्रयोग करने तथा लाप्लास रूपान्तर के प्रमेय का इसमें प्रयोग करने पर और इस परिणाम में पुनः सान्त फूरिये ज्या रूपान्तर के प्रतिलोमन प्रमेय का प्रयोग करने पर

$$\bar{u}(r, z, t) = \frac{2}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{u}_s(n, m, t) \sin\left(\frac{m\pi z}{h}\right) \quad (4.13)$$

अन्त में (1.17) से लेकर (4.13) तक के प्रयोग द्वारा प्राप्त करते हैं

$$u(r, z, t) = \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{||C_\nu(h_1, h_2, \lambda_i x^\beta)||^2}$$

$$[u_0(n, m) \exp\left\{-k\left(\lambda_i^2 + \frac{m^2\pi^2}{h^2}\right)\right\} t - \int_0^t k\psi_s(m, u)$$

$$-\xi(\lambda_i, m, t) \exp\left\{-k\left(\lambda_i^2+\frac{m^2\pi^2}{h^2}\right)\right\}(t-u)du$$

$$\sin\left(\frac{m\pi z}{h}\right) C_0(h_1, h_2, \lambda_i v^\beta)] \quad (4.14)$$

जहाँ

$||C_\nu(h_1, h_2, \lambda_i x^\beta)||^2$ जो (1.12) में दिया है ।

द्वितीय प्रावस्था : यदि हम विचरणशील घनत्व वाले सिलिंडर को लें और मान लें कि $\rho=\rho_0 r^2$, जहां ρ_0 अचर है तो समीकरण (4.5) समानीत होकर देता है—

$$K\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)+\frac{\xi(r, z, t)}{\rho_0 r^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=0 \qquad (4.15)$$

r के प्रति समीकरण (1.14) को समीकरण (4.15) में व्यवहृत करने पर

$$K\frac{d^2\bar{u}}{dz^2}-\frac{d\bar{u}}{dt}+\frac{\bar{G}(\lambda_i, z, t)}{\rho_0}-\lambda_i^2 k\bar{u}=k\psi(z, t) \qquad (4.16)$$

जहां $\psi(z, t)$ को प्रथम प्रावस्था विश्लेषण में दिया जा चुका है और

$$\bar{G}(K_i, z, t)=\int_a^b \frac{\xi(r, z, t)}{r}C_0(h_1, h_2, \lambda_i r^{\beta})dr$$

अब x के प्रति फूरिये ज्या रूपान्तर को (4.16) में व्यवहृत करने पर जैसा कि प्रथम आवस्था में (4.7) के कारण है, हम देखते हैं कि

$$\frac{d\bar{u}_s}{dt}+k\left(\frac{m^2\pi}{h^2}+\lambda_i^2\right)\bar{u}_s(n, m, t)=k\psi_s(m, t)+\frac{\bar{G}_s(\lambda_i, m, t)}{\rho_0} \qquad (4.17)$$

जहां $K\psi_s(m, t)$ प्रथम प्रावस्था में दिया है

$$\bar{G}_s(\lambda_i, m, t)=\int_0^h \frac{\xi(r, z, t)}{r}\sin(m\pi z/h)dz$$

आगे, t के प्रति (4.17) का लाप्लास रूपान्तर (4.8) के कारण देता है—

$$L[\bar{u}_s(n, m, t)]=\frac{[\bar{u}_{0, s}(n, m)]}{\left[p+k\left(\lambda_i+\frac{m^2\pi^2}{h^2}\right)\right]}-\frac{kL[\psi_s(m, t)]}{\left[p+k\left(\lambda_i^2+\frac{m^2\pi^2}{h^2}\right)\right]}$$
$$+\frac{L[\bar{G}_s(\lambda_i, m, t)]}{\left[p+k\left(\lambda_i^2+\frac{m^2\pi^2}{h^2}\right)\right]} \qquad (4.18)$$

(4.18) में व्युत्क्रम लाप्लास रूपान्तर का प्रयोग करने पर और फिर इसमें लाप्लास रूपान्तर के प्रमेय को व्यवहृत करने तथा पुनः इस परिणाम में सान्त फूरिये ज्या रूपान्तर के व्युत्क्रम प्रमेय को व्यवहृत करने पर

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 31, No. 2-3, 1988

फूरियर श्रेणी के चेजारो माध्य द्वारा फलन का सिन्निकटन

जी० एस० त्रिवेदी

श्री नीलकंठेश्वर शासकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय, खंडवा (म० प्र०)

[प्राप्त—जनवरी 7, 1987]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में लेखक ने मृदुला जैन एवं जी० एस० पाण्डेय द्वारा प्राप्त परिणाम में प्रयुक्त प्रतिबन्ध से निर्बल प्रतिबन्ध का प्रयोग कर उसी परिणाम को प्राप्त किया है।

Abstract

On the degree of approximation to a function by the Cesaro means of its Fourier series. *By* G. S. Trivedi, S. N. G· P. G. College, Khandwa. (M. P.)

In the present paper author has proved an earlier result of Mridula Jain and G. S. Pandey (1985)"On degree of approximation to a function by its Fourier series" under weaker condition.

1. माना कि $f(x)$ एक आवर्ती फलन है जिसका आवर्त 2π है तथा जो अन्तराल में समाकलनीय है एवं

$$f(x) \sim \tfrac{1}{2} a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.1}$$

जहाँ a_n एवं b_n फूरियर गुणांक है।

उपर्युक्त अनन्त श्रेणी का चिजारो माध्य $\sigma^{\alpha}_{n}, n=0, 1, 2$ निम्नानुसार परिभाषित है—

$$\sigma_n^{\alpha} = \frac{S_n^{\alpha}}{E_n^{\alpha}}, \quad \alpha > -1$$

जहाँ
$$\sum_{n=0}^{\infty} S^{\alpha}_{n} \cdot x^{n}=(1-x)^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} S_{n} X^{n}$$

$$=(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_{n} x_{n}$$

एवं
$$E_{n}^{\alpha}=\binom{n+\alpha}{n}=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\, \Gamma(\alpha+1)}$$

यदि $\lim \sigma^{\alpha}_{n}=S$

जहाँ S एक निश्चित संख्या है तब श्रेणी (1.1) संकलनीय (C, α) कहलाती है।

हम लिखेंगे

$$\phi(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$$

$$D_{n}(t)=\tfrac{1}{2}+\sum_{1}^{n} \text{cosnt}=\frac{\sin\,(n+\frac{1}{2})\, t}{2 \sin t/2}$$

$$\sigma_{n}^{\alpha}\ (x)=\frac{1}{E_{n}^{\alpha}} \sum_{v=0}^{n} E_{n-v}^{\alpha-1}\ S_{\iota}(x)$$

$$K_{n}^{\alpha}\ (t)=\frac{1}{E_{n}^{\alpha}} \sum_{v=0}^{n} E_{n-v}^{\alpha-1}\ D_{v}(t)$$

एवं
$$(n, i)=\left\{\left(n+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)t-\frac{\alpha\pi}{2}\right\}$$

जहाँ $S_{\iota}(x)$ श्रेणी (1.1) का n वां आंशिक योग है।

2. फ्लीट[1] ने फूरियर श्रेणी के चिजारो माध्य द्वारा फलन के सन्निकटन पर निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है—

प्रमेय A : यदि $0<\alpha<1$, $0<\delta\leqslant\pi$ तथा X बिन्दु इस प्रकार है कि

$$\int_{0}^{t} |d\phi(u)| \leqslant at^{\alpha} \tag{2.1}$$

जहाँ $0 \leqslant t \leqslant \delta$,

तब $\sigma_n^{\alpha}(X) - f(x) = 0(n^{-\alpha})$

सिद्दिकी[4] ने फ्लीट के प्रमेय का सामान्यीकरण कर निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है—

प्रमेय B : यदि $0 < K < 1$, $0 < \delta \leqslant \pi$ तथा X बिन्दु इस प्रकार है कि

$$\int_0^t |d\phi(u)| \leqslant A\psi(t)\, 0 \leqslant t \leqslant \delta \tag{2.2}$$

$$\text{तब} \quad \sigma_n^K(x) - f(x) = 0\left(\psi\left(\frac{1}{n}\right)\right) + 0(n^{-K})$$

जहाँ $\psi(t)$ धनात्मक बढ़ते क्रम वाला फलन इस प्रकार है

$$\int_{2/n}^{\delta} \frac{\psi(t)}{t^2} dt = 0\left(n\psi\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad n \to \infty \tag{2.3}$$

जैन तथा पाण्डेय[2] ने सिद्दिकी के प्रमेय को उत्तम प्रतिबन्धों के अन्तर्गत सिद्ध किया। उन्होंने निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है—

प्रमेय C : यदि $0 < \alpha < 1$, $0 < \delta \leqslant \pi$ तथा X बिन्दु इस प्रकार है कि

$$\int_t^{\delta} |\phi \frac{(u)}{u^2}|\, du = 0\left(\left(\frac{1}{t}\right)\psi(t)\right), \; t \to 0 \tag{2.4}$$

तब

$$\sigma_n^{\alpha}(x) - f(x) = 0\left(\psi\left(\frac{1}{n}\right)\right) + 0(n^{-\alpha})$$

प्रस्तुत प्रपत्र में हम जैन तथा पाण्डेय[2] द्वारा प्राप्त परिणाम को उनके द्वारा प्रयुक्त प्रतिबन्धों से निर्बल प्रतिबन्धों के अन्तर्गत प्राप्त करेंगे। हम निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे।

प्रमेय : यदि $0 < \alpha < 1$

एवं $\int_0^t |\phi(u)| \,.\, du = 0(t\psi(t))$

तब $\sigma_n^{\alpha}(x) - f(x) = \psi\left(\frac{1}{n}\right) + 0(n^{-\alpha})$

3. प्रमेय सिद्ध करने में निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की जरूरत होगी ।

प्रमेयिका 1 : हार्डी[3]

$$K_n^{\alpha}(t)=\begin{cases} A_n, & 0\leqslant t\leqslant \pi \\ R(t)+S(t), & \frac{1}{n}\leqslant t\leqslant n \end{cases}$$

जहाँ $$R(t)=\frac{\sin(n,t)}{E_n^{\alpha}(2\sin t)^{\alpha+1}}$$

एवं A स्थिरांक है ।

प्रमेयिका 2 : फ्लीट[1]

यदि $\phi(t)\in L,\ 0<\alpha<1,$ एवं $0<\phi\leqslant\pi$

तब $$\int_{\delta}^{t}\phi(u)\ K_n^{\alpha}(u)\ du=0(n^{-\alpha})$$

4. प्रमेय की उपपत्ति

हमें ज्ञात है कि :

$$\sigma_n^{\alpha}(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\phi(u)\ K_n^{\alpha}(u)\ du$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{1/n}+\int_{1/n}^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right]\phi(u)\ \ K_n^{\alpha}(u)\ du$$

$=I_1+I_2+I_3$ माना

सर्वप्रथम $$I_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{1/n}|\phi(u)|\ K_0^{\alpha}(u)\ du$$

$$=0(n)\int_0^{1/n}|\phi(u)|\ du,$$ (प्रमेयिका 1 के प्रयोग से)

$$=0\left(n\ \frac{1}{n}\ \psi\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$ (प्रमेय में दिये प्रतिबन्धों के प्रयोग से)

$$=0\left(\psi\left(\frac{1}{n}\right)\right) \tag{4.1}$$

अब

$$I_2=\frac{1}{\pi}\int_{1/n}^{\delta} |\phi(u)|\, K_n^{\alpha}(u)\, du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{1/n}^{\delta} |\phi(u)|\, (R(u)+S(u)\, du$$

$$=J_1+J_2, \text{ माना}$$

अब

$$J_2=\frac{1}{\pi}\int_{1/n}^{\delta} (|\phi(u)|)\, S(u)\, du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{1/n}^{\delta} (|\phi(u)|)\, n^{-1} u^{-2}\, du, \quad \text{(प्रमेय 1 के प्रयोग से)}$$

$$=0\left(n^{-1}\int_{1/n}^{\delta} \frac{|\phi(u)|}{u^2} du\right)$$

$$=0\left[n^{-1}\left\{n^2 \int_{1/n}^{\delta} |\phi(u)|\, du+\int_{1/n}^{\delta} \frac{2}{u^3}\int_{1/n}^{\delta} |\phi(u)|\, du\right\}\right]$$

$$=0\left[n^{-1}\left\{n^2 \frac{1}{n}\, \psi\left(\frac{1}{t}\right)+\int_{1/n}^{\delta} \frac{2}{u^3}\cdot u\psi(u)\, du\right\}\right]$$

$$=0\left[\psi\left(\frac{1}{n}\right)+n^{-1}\int_{1/n}^{\delta} \frac{\psi(u)}{u^2} du\right]$$

$$=0\left[\psi\left(\frac{1}{n}\right)\right]+0\left[n^{-1}\psi\left(\frac{1}{n}\right)\int_{1/n}^{\delta} \frac{1}{u^2}\cdot du\right]$$

$$=0\left(\psi\left(\frac{1}{n}\right)\right)+0\left(n^{-1}\psi\left(\frac{1}{n}\right)\cdot n\right)$$

$$=0\left(\psi\left(\frac{1}{n}\right)\right) \tag{4.2}$$

$$J_1=O\left(\int_{1/n}^{\delta} |\phi(u)|\, n^{-\alpha} u^{-\alpha-1}\, du\right)$$

$$=0\left[n^{-\alpha}\frac{1}{n^{-\alpha-1}}\cdot 1/n\, \psi\left(\frac{1}{n}\right)+0\left[n^{-\alpha}\int_{1/n}^{\delta} \frac{1}{u^{-\alpha}}\, u\psi(u)\, du\right]\right.$$

$$=0\left(\psi\left(\frac{1}{n}\right)\right)+0\left[n^{-\alpha}\,\psi\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\int_{1/n}^{\delta}\frac{1}{u^{-\alpha-1}}du\right]$$

$$=0\left(\psi\left(\frac{1}{n}\right)\right)+0\left[n^{-\alpha}\,\psi\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^{-\alpha}}\right]$$

$$=0\,\psi\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.3}$$

अन्त में, प्रमेयिका 1 के प्रयोग से

$$I_3=\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}|\phi(u)|\;K_n^{\alpha}(u)\,du$$

$$=0\,(n^{-\alpha}) \tag{4.4}$$

परिणाम (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) को एकत्र करने पर

$$\sigma_n^{\alpha}(x)-f(x)=0\,(n^{-\alpha})+0\left(\psi\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रस्तुत प्रपत्र की तैयारी में डॉ० बी० के० व्योहार द्वारा मार्गदर्शन के लिए लेखक हृदय से आभारी है।

निर्देश

1. फ्लीट, टी० एम०, Quarterly J. of Maths. 1956, 7, 87-95.

2. जैन, मृदुला तथा पाण्डेय जी०, एस०, Vikram Mathematical Journal, 1985, 5, 37-43.

3. हार्डी, जी० एच०, Divergent Series, आक्सफोड यूनिवर्सिटी प्रेस, लन्दन, 1956.

4. सिद्दिकी, ए० एच०, I. J. Pure App Math., 1971, 2(3), 367-373.

Vijnana Parishad Anusondhan Patrika, Vol. 31, No. 2-3, 1988

लागेर श्रेणी की परम संकलनीयता

जी० एस० त्रिवेदी
श्री नीलकण्ठेश्वर शासकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय, खंडवा (म०प्र०)

[प्राप्त—जनवरी 3, 1988]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में $x=0$ पर $-1<\alpha<1/2$ के लिये लागेर श्रेणी की $|C, 1|$ संकलनीयता पर एक प्रमेय सिद्ध की गई है जो व्योहार तथा सिंधी[1] द्वारा सिद्ध प्रमेय से निर्बल शर्तों पर सिद्ध होती है।

Abstract

Absolute Cesaro summability of Laguerre series. *By* G. S. Trivedi, S. N. P. G. College, Khandwa (M.P.).

In this paper a theorem on $|C, 1|$ summability of Laguerre series at $x=0$ for $-1<\alpha<1/2$ is proved under weaker conditions than those of Beohar and Sindhi.[1]

1. माना कि Σa_n एक अनन्त श्रेणी है जिसके आंशिक योगों के अनुक्रम $\{S_n\}$ के कोटि एक का n वां चिजारो मध्यमान σ_n है। श्रेणी Σa_n परम संकलनीय कहलावेगी यदि

$$\Sigma_n |\sigma_n - \sigma_{n-1}| < \infty \tag{1.1}$$

माना कि T_n द्वारा अनुक्रम $\{n\, a_n\}$ का कोटि एक का nवां चिजारो मध्यमान व्यक्त होता है तो

$$n(\sigma_n - \sigma_{n-1}) = T_n$$

अत: श्रेणी Σa_n के परम संकलनीय होने की आवश्यक शर्त है कि

$$\sum \frac{|T_n|}{n} < \infty \tag{1.2}$$

2. माना कि $f(x) \in L(0, \infty)$, तब $f(x)$ से सम्बन्धित लागेर श्रेणी निम्नलिखित है।

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{\alpha}(x) \tag{2.1}$$

$$an = \left\{ \Gamma(n+1)\binom{n+\alpha}{n} \right\}^{-1} \int_0^{\infty} e^{-y} f(y) \quad L_n^{(\alpha)}(y)\, dy \tag{2.2}$$

और

$$L_n^{(\alpha)}(x),\ a > -1,\quad n\text{-वाँ लागेर बहुपद है।}$$

3. व्योहार तथा सिन्धी[1] ने श्रेणी (2.1) की $x=0$ पर संकलनीयता पर निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया।

प्रमेय :

$-1<\alpha<\frac{1}{2}$ एवं $0<\mu\leqslant\frac{1}{4}-\frac{1}{2}^{\alpha}$ के लिए श्रेणी (2.1) बिन्दु $X=0$ पर संकलनीय होगी यदि $f(x)$ सीमित अन्तराल $[0, b]$ में परिसीमित विचरण का हो।

$$\int_t^{\delta} \frac{|d\,f(y)|}{y^{\mu}} = 0\left(\log \frac{1}{t}\right),\ t \to 0 \tag{3.1}$$

$$\int_{\delta}^{n} e^{-y/2}\, y^{\alpha/2-1/4}\, |df(y)| = 0\ (\log n) \tag{3.2}$$

और

$$\int_{n}^{\infty} e^{-y/2}\, y^{\alpha/2-1/2}\, |df(y)| = 0\ (\log n) \tag{3.3}$$

प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य (3.1) के स्थान पर इससे व्यापक परिकल्पना पर $x=0$ तथा $-1<\alpha<\frac{1}{2}$ के लिये $|C, 1|$ संकलनीयता पर प्रमेय सिद्ध करना है। हम निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे।

प्रमेय :

$-1<\alpha<\frac{1}{2}$ एवं $0<\mu\leqslant\frac{1}{4}-\alpha/2$ के लिये श्रेणी (2.1) बिन्दु $X=0$ पर $|C, 1|$ संकलनीय होगी यदि सीमित अन्तराल $[0, b]$ में परिसीमित विचरण का हो।

$$\int_t^{\delta} |df(y)| = 0\ (t^{\mu}\ (\log 1/t)^{p})\ P>1 \tag{3.4}$$

$$\int_{\delta}^{n} e^{-y/2}\, y^{\alpha/2-1/4}\, |df(y)| = 0((\log n)^{p}) \tag{3.5}$$

$$\int_n^\infty e^{-y/2}\, y^{\alpha/2-1/2}\, |df(y)| = 0((\log n)^p) \tag{3.6}$$

4. प्रमेय सिद्ध करने हेतु निम्नलिखित प्रमेयिकाओं का आवश्यकता होगी ।

उपप्रमेय 1 : (जी० जेगो[4])

माना कि α स्वेच्छ वास्तविक संख्या है एवं C और W नियत धनात्मक स्थिरांक हैं, तब

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} x^{-\alpha/2-1/4}\, 0(n^{\alpha/2-1/4}), & c/n \leqslant x \leqslant w \\ 0(n^\alpha), & 0 \leqslant x \leqslant c/n \end{cases} \tag{4.1}$$

उपप्रमेय 2 : (जी० जेगो[4])

माना कि a स्वेच्छ वास्तविक है, $W>0, \quad 0<n<4$

तब यदि $n \to \infty$

$$\max e^{-x/2}\, x^{\alpha/2+1/4}\, |L_n^{(\alpha)}(x)| \sim \begin{cases} n^{\alpha/2-1/4}, & W \leqslant x \leqslant (4-n)n \\ n^{\alpha/2-1/4}, & X \geqslant W \end{cases} \tag{4.2}$$

वाम पक्ष का सर्वाधिक मान साथ में दर्शाये गये अन्तराल से लिया गया है ।

5. **प्रमेय की उपपत्ति** :

सूत्र $$L_n^{(\alpha)}(0) = \binom{n+\alpha}{n}$$

$$D(e^{-x}\, x^{\alpha-1})\, D\, L_n^{(\alpha)}(x) + n\, e^{-x}\, x^\alpha\, L_n^{(a)}(x) = 0$$

और $D = d/dx$

$$D\, L_n^{(\alpha)}(x) = -L_{n-\alpha}^{(\alpha+1)}(x)$$

एवं स्टीलजेस समाकल के प्रयोग से

$$a_n\, L_n^\alpha(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty e^{-y}\, y^\alpha\, L_n^{(\alpha)}(y)\, f(y)\, dy$$

$$=\frac{1}{n\Gamma(a+1)}\int_0^\infty D\left\{e^{-y}\, y^{\alpha+1}\ \ L_n^{(\alpha+1)}(x)\right\}f(y)\ .\ dy$$

$$=\frac{1}{n\Gamma(a+1)}\Big[e^{-y}\, y^{(\alpha+1)}\, L_{n-1}^{(\alpha+1)}\,(y)\, f(y)\,\Big]_0^\infty$$

$$=\frac{1}{n\Gamma(a+1)}\int_0^\infty e^{-y}\, y^{\alpha+1}\ \ L_{n-1}^{(\alpha+1)}\,(y)\ df(y)$$

$$=-\ \frac{1}{n\Gamma(a+1)}\int_0^\infty e^{-y}\, y^{\alpha+1}\ \ L_{n-1}^{(\alpha+1)}\,(y)\ df(y)$$

इसलिए

$$n\, a_n\, L_n^{(\alpha)}\,(0)=\frac{-1}{\Gamma(a+1)}\int_0^\infty e^{-y}\, y^{\alpha+1}\ \ L_{n-1}^{(\alpha+1)}\ df(y)$$

अतः

$$\sum_{v=1}^{m} v\ a_v\, L_v^{(\alpha)}\,(0)=-\frac{1}{\Gamma(a+1)}\int_0^\infty e^{-y}\, y^{\alpha+1}\, L_{n-1}^{(\alpha+2)}\ \ (y)\ df(y)$$

अब T_n की परिभाषा से

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{|T_n|}{n}=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}\left|\frac{1}{n+1}\right|\left|\sum_{v=1}^{n}\ v\ nv\ L_v^{(\alpha)}(0)\right|$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2\Gamma(a+1)}\quad\int_0^\infty e^{-y}\ y^{\alpha+1}\ |L_{\alpha-1}^{(\alpha+2)}\ \ (y)|\ |df(y)|$$

अब हम जानते हैं कि

$$M(n)=\int_0^\infty e^{-y}\ y^{\alpha+1}\ |L_{n-1}^{(\alpha+2)}\ (y)|\ |df(y)|$$

$$=\int_0^{c/n}+\int_{c/n}^{\delta}+\int_{\delta}^{n}+\int_{n}^{\infty}$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4$$

जहाँ कि C एवं W नियत धनात्मक स्थिरांक हैं।

(4.1) और (3.4) का प्रयोग करने पर

$$I_1=0(n^{\alpha+2})\int_0^{c/n}|df(y)|$$

$$=0(n^{1-\mu}\ (\log n)^{p})$$

(4.1) का प्रयोग करने पर

$$I_2=0(n^{\alpha+2/2-1/4})\int_{c/n}^{\delta} y^{\alpha+1}\, y^{-(\alpha+2)/2-1/4}\,|df(y)|$$

$$=0(n^{\alpha/2+3/4})\int_{c/n}^{c/n} y^{\alpha/2-1/4}\,|df(y)|$$

$$=0(n^{1-\mu}\,(\log n)^{p})$$

(4.2) और (3.6) से

$$I_3=0(n^{\alpha/2+3/4})\int_{\delta}^{n} e^{-y/2}\, y^{\alpha/2-1/4}\,|df(y)|$$

$$=0(n^{\alpha/2+3/4}\,(\log n)^{p})$$

अन्त में (4.2) और (3.6) से

$$I_4=0(n^{\alpha+2/2-1/12})\int_{n}^{\infty} e^{-y/2}\, y^{\alpha/2-1/4}\,|df(y)|$$

$$=0(n^{\alpha/2+11/12})\int_{n}^{\infty} e^{-y/2}\,.\, y^{\alpha/2-1/12-1/6}\,.\,|df(y)|$$

$$=0(n^{\alpha/2+3/4})\int_{n}^{\infty} e^{-y/2}\, y^{\alpha/2-1/12}\,|df(y)|$$

$$=0(n^{\alpha/2+3/4}\,(\log n)^{p})$$

अत: हम देखते हैं कि

$$\sum_{n=1}^{n}\frac{|M(n)|}{n^2}<\infty$$

इस प्रकार प्रमेय सिद्ध होता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस शोधपत्र हेतु प्रदत्त मार्गदर्शन एवं सुझावों के लिए लेखक डॉ० बी० के० व्योहार का अत्यन्त आभारी है।

निर्देश

1. व्योहार. बी० के० तथा सिन्धी, डी० एस०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1980, **23**, 105-109.
2. गुप्ता, डी० पी०, **डी० एस-सी० थीसिस,** इलाहाबाद विश्वविद्यालय, 1970.
3. सिंह, टीकम, **विज्ञान परिषद अनु०** पत्रिका, 1979, **22**, 163-173.
4. जेगो, जी०, Orthogonal Polynomials, **अमे० मैथ० सोसा० कोलोकि० पब्लि०, 1959.**

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 31. No. 2-3, 1988

गोबर, तुलसी और घीकुंवार का एक्स-किरण विश्लेषण

भूपेन्द्र नारायण मेहरोत्रा
भौतिकी विभाग, सरदार पटेल विश्वविद्यालय, बल्लभ विद्यानगर-388120

तथा

महाराज नारायण मेहरोत्रा
भौतिकी विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—जनवरी 13, 1988]

सारांश

गोबर, तुलसी और घीकुंवार उपयोगी पदार्थ हैं। इनमें तुलसी और घीकुंवार का औषधीय महत्व भी है। पर्यावरण संरक्षण में भी इनकी महत्वपूर्ण भूमिका ज्ञात हुई है, तथापि इनका एक्स-किरण "डाटा" उपलब्ध नहीं हैं। अतः इस प्रपत्र में गोबर, तुलसी और घीकुंवार का एक्स-किरण विश्लेषण कर उनके "*d*" मान (अन्तराल दूरियाँ) परिकलित कर प्रस्तुत किये गये हैं।

Abstract

X-Ray analysis of cow dung, Tulsi and Aloe Vera. *By* B. N. Mehrotra, Saradar Patel University, Vallabh Vidya Nagar and **M.N. Mehrotra**, Department of Geology, Banaras Hindu University, Varanasi.

Cowdung, Tulsi and Aloe Vera are useful materials. Of these Tulsi and Aloe Vera have medicinal value. Recently their importance with regard to environmental conservation has also been realised. However, the *X*-ray data of these materials is not available. Hence, in this note the results of *X*-ray analysis of these three, with '*d*' (Interplanar Distances in $A°$) values calculated, have been presented.

गोबर, तुलसी और घीकुंवार उपयोगी पदार्थ हैं। इनमें तुलसी और घीकुंवार का औषधीय महत्व है। पर्यावरणीय संरक्षण में भी इनका योगदान है। इन तीनों ही पदार्थों के एक्स-किरण डाटा उपलब्ध नहीं हैं। अतः इनका एक्स-किरण अध्ययन किया गया है।

प्रयोगात्मक

अध्ययन हेतु गोबर, तुलसी और घीकुंवार के प्रतिदर्श एकत्र किये गये। इनमें से प्रत्येक को पृथक-पृथक, अवन में कई दिन तक रखकर सुखाया गया। सूखे पदार्थों का चूर्ण तैयार किया गया तथा इस चूर्ण के "डेवी शेरर" कैमरा द्वारा $Cu\ K\alpha$ विकिरण का उपयोग कर, एक्स-किरण विवर्तन चित्र प्राप्त किये गये।

परिणाम तथा विवेचना

गोबर

पशुओं जैसे गाय, बैल, भैंस आदि के मल को गोबर कहते हैं। इसका उपयोग खाद तथा इंधन के रूप में किया जाता है। खाद के रूप में गोबर अत्यन्त उपयोगी है क्योंकि इसमें पौधों की आवश्यकता के अनुरूप खनिज तत्व विद्यमान होते हैं। जलावन के लिये गोबर को सुखाकर कड़ा कर लिया जाता है। इसे "कंडे" या "उपले" की संज्ञा दी जाती है। गोबर के कीटाणुनाशक गुणों के कारण पर्यावरण संरक्षण में भी इसका महत्वपूर्ण स्थान है।

एक्स-किरण अध्ययन हेतु एक स्वस्थ गाय के बँधे हुए गोबर को अच्छी तरह सुखाकर चूरा कर, एक्स-किरण विश्लेषण किया गया तथा "*d*" मान परिकलित किये। परिणाम सारणी 1 में प्रस्तुत है।

सारणी 1

गोबर के एक्स-किरण विश्लेषण-परिणाम

प्रतिदर्श	एक्स-किरण रेखा की क्रम संख्या	2θ मान (डिग्री में)	d (Å में)	आपेक्षिक तीव्रता
	1	26.85	3.320	(प्रबल) S
	2	50.35	1.812	(मध्यम) M
गोबर	3	55.10	1.666	(क्षीण) W
	4	60.10	1.539	(अतिक्षीण) VW
	5	68.40	1.371	(मध्यम) M

नोट : S=प्रबल, M=मध्यम, W=क्षीण, VW=अतिक्षीण।

तुलसी

तुलसी का भारतीय संस्कृति में महत्वपूर्ण स्थान है। हमारे देश में इस पौधे की पूजा की जाती है। इसके औषधीय महत्व का वर्णन चरक, सुश्रुत आदि संहिताओं में मिलता है। अँग्रेजी में इसका प्रचलित नाम है "होली बेसिल" (Holy Basil) तथा वानस्पतिक नाम है "ओसीमम सेंक्टम" (Ocimum Sanctum), तुलसी की प्राय: दो किस्में देखने में आती है—सफेद या गोरी तुलसी, तथा काली या श्यामा तुलसी।

सफेद तुलसी का एक्स-किरण विश्लेषण परिणाम सारणी 2 में दिया गया है।

सारणी 2

तुलसी के एक्स-किरण विश्लेषण-परिणाम

प्रतिदर्श	एक्स-किरण रेखाओं की क्रम संख्या	2θ मान (डिग्री में)	d (Å में)	आपेक्षित तीव्रता
	1	15.05	5.886	(प्रबल) S
	2	24.70	3.604	(क्षीण) W
तुलसी	3	27.00	3.302	(क्षीण) W
	4	28.76	3.104	(क्षीण) W
	5	30.00	2.970	(अतिक्षीण) VW
	6	38.26	2.325	(अतिक्षीण) VW

घीकुंवार :

इसे कुमारी, खारपाठा या गोंड पाठा भी कहते हैं। इसकी बहुत सी जातियाँ हैं। इससे निर्मित औषधि को कुमारी औषधि कहते हैं तथा यह रेचक का कार्य करती है। अंग्रेजी में इसे Aloe Vera कहते हैं। इसके एक्स-किरण विश्लेषण परिणाम सारणी 3 में दिये गये हैं।

सारणी 3

घीकुंवार के एक्स-किरण विश्लेषण परिणाम

प्रतिदर्श	एक्स-किरण रेखा की क्रम संख्या	2θ मान (डिग्री में)	"d" (Å में)	आपेक्षिक तीव्रता	
	1	15.06	5.886	(प्रबल)	S
	2	24.80	3.589	(प्रबल)	S
घीकुंवार	3	30.20	2.959	(मध्यम)	M
	4	38.75	2.323	(मध्यम)	M
	5	46.45	1.954	(क्षीण)	W
	6	54.55	1.682	(अतिक्षीण)	VW

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक प्रोफेसर टी० पी० सिंह अध्यक्ष, जैवभौतिकी विभाग, अखिल भारतीय चिकित्सा विज्ञान संस्थान, नई दिल्ली को उनके सहयोग एवं सुझाव के लिए आभार प्रदर्शित करते हैं।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 31, No. 2-3 1988

क्षारीय माध्यम में ऑस्मियम टेट्राक्साइड द्वारा ट्राइएथिलऐमीन के ऑक्सीकरण की गतिकी एवं क्रियाप्रविधि का एक अध्ययन

आर० के० मिश्र, एस० सक्सेना तथा ए० के० सिंह
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[प्राप्त—जनवरी 4, 1988]

क्षारीय माध्यम में ट्राइएथिलऐमीन की ऑस्मियम टेट्राक्साइड द्वारा आक्सीकरण का अध्ययन किया गया। आक्सीकारक-सान्द्रता के सापेक्ष क्रिया गति प्रथम क्रम की रही। ऐमीन तथा हॉइड्राक्सिल आयन के लिये अल्प सान्द्रता पर क्रिया प्रथम क्रम तथा उच्च सान्द्रण पर शून्य क्रम की ओर अग्रसर हुई। प्रायोगिक परिणामों के आधार पर स्पष्ट हुआ कि ऐमीन का प्रारम्भिक आक्सीकरण मुक्तमूलक के बनने के साथ शुरू हुआ, जिसके साथ आक्सीकारक पहले एक सक्रियण संकीर्ण (Activated complex) बनाता है जो वियोजनोपरान्त उत्पाद्य तथा Os(VI) नमूना देता है। उदासीन लवण डालने से क्रियादर पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। उष्मागतिक चरांकों की गणना की गयी तथा प्राप्त परिणामों के आधार पर क्रियाविधि-पथ का निरूपण किया गया।

Abstract

Kinetics and mechanism of the oxidation of triethylamine by osmium tetroxide in alkaline medium. *By* R. K. Misra, S. Saxena and A. K. Singh, Chemistry Department, University of Allahabad.

Kinetics and mechanism of oxidation of triethylamine (TEA) by osmium-tetroxide in alkaline medium have been studied. A first order dependence in $[OsO_4]$ and the first order kinetics at lower concentration tends to zero-order kinetics, at higher concentration of amine as well as OH^- ion. Experimental results indicate that the initial oxidation of amine takes place via the free radical formation. The oxidant forms an activated complex with free radical, which disproportionates into product and Os(VI) species. The addition of neutral salt shows insignificant effect on the rate of the reaction. Activation parameters were calculated and on the basis of the results obtained, a propable reaction mechanism has been proposed.

कार्बनिक यौगिकों की आक्सीकारक प्रवृत्ति[1-8] की तुलना में आँस्मियम टेट्राक्साइड की उत्प्रेरक गतिकी अधिक प्रचलित है[9,10] अतएव इस कार्य में OsO_4 के द्वारा ट्राइएथिल ऐमीन के आक्सीकरण का अध्ययन किया गया है।

प्रयोगात्मक

आवश्यक सभी क्रियाकारक उपलब्ध उच्च कोटि के लिये गये। घोल बनाने हेतु द्विआसुत जल प्रयुक्त किया गया। क्रियागतिकी के अध्ययन में बैकमेन यू० वी० स्पेक्ट्रोफोटोमीटर मॉडल 26 को उपयोग में लाया गया। आक्सीकारक के मानक घोल हेतु अवशोषित विकिरण की तरंगदैर्ध्य का मान 420 nm आया। शून्य समयावधि हेतु पानी के साथ रिक्त क्रिया (Blank reaction) पर भी तरंगदैर्ध्य का मान ज्ञात किया गया जिससे स्पष्ट हुआ कि क्रिया के मध्य रंगीन घोल की शक्ति क्षीण होने के कारण Os(VIII) Os(VI) में बदलकर अवशोषणता में कमी दिखाती है।

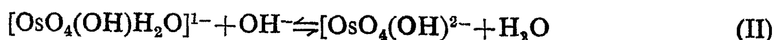
परिणाम तथा विवेचना

अन्य क्रियाकारकों की सान्द्रता को स्थिर रखते हुये आक्सीकारक की विभिन्न मात्राओं के साथ किये गये। प्रयोग से स्पष्ट हुआ कि क्रिया दर प्रथम क्रम की है जब कि ऐमीन तथा हाइड्राक्सिल आयन के कम सान्द्रण पर प्रथम क्रम वाली क्रिया अधिक सान्द्रण पर शून्य क्रम की ओर बढ़ती है (सारणी 1) आक्सीकारक की सान्द्रता तथा $-da/ta$ के बीच जब एक ग्राफ (चित्र 1 ए) खींचा गया तो मूलबिन्दु से जाने वाली सीधी रेखा OsO_4 में प्रथम क्रम क्रिया की पुष्टि करती है। चित्र (1 बी तथा 1 सी) से स्पष्ट है कि जब [TEA] $vs(da/dt)$ तथा $[OH^-]$ $vs(da/dt)$ के बीच ग्राफ खींचा जाता है तो क्रिया की दर कम सान्द्रता पर प्रथम क्रम की है जो अधिक सान्द्रता होने पर शून्य क्रम की ओर बढ़ती है। चित्र (1 डी तथा 1 ई) के द्वारा भी उपयुक्त तथ्यों की पुष्टि होती है जो $k_1$vs [TEA] तथा $k_1$vs $[OH^-]$ के बीच खींचे गये ग्राफ हैं। आयनिक सान्द्रता (u) का प्रभाव क्रिया दर पर शून्य आया (सारणी 2)। विशिष्ट क्रिया दर का मान (R_r)67.80 $M^{-2}l^{-1}$ sec^{-1} (at 26°C) सक्रियण ऊर्जा (Ea)223. K Cal. $Mole^{-1}$, सक्रियण एन्ट्रापी $(^{\#}\triangle S^{\#})$ 24.82 l.u. आवृत्ति गुणांक (A) $3.64\times10^{11}M^{+1}l^{-1}$ sec^{-1} तथा मानक मुक्त ऊर्जा $(\triangle S^{\#})$ 15.02 K Cal $Mole^{-1}$ गणना के बाद प्राप्त हुई।

क्षारीय माध्यम में OsO_4 साम्य (I) तथा (II) में दर्शित $[OsO_4(OH)_2]^{2-}$ तथा $[OsO_4(OH)H_2O]^{1-}$ रूप के आक्टाहेड्रल संकीर्ण बनाती है।[9-11] कम OH^- सान्द्रता पर संकीर्ण साम्य (1) तथा अधिक OH^- सान्द्रता पर बना संकीर्ण साम्य (II) के अनुरूप होता है। किन्तु साम्य (III) के द्वारा $[OsO_4(OH_2]^{2-}$ का बनना सीधे लिखा जा सकता है अतएव यह मान लिया गया है कि साम्य (I) का मान साम्य (II) से ज्यादा होगा।



$$OsO_4+OH^-+H_2O\rightleftharpoons[OsO_4(OH)H_2O]^{1-} \qquad (I)$$



$$[OsO_4(OH)H_2O]^{1-}+OH^-\rightleftharpoons[OsO_4(OH)^{2-}+H_2O \qquad (II)$$



$$OsO_4+2OH^-\rightleftharpoons[OsO_4(OH)_2]^{2-} \qquad (III)$$

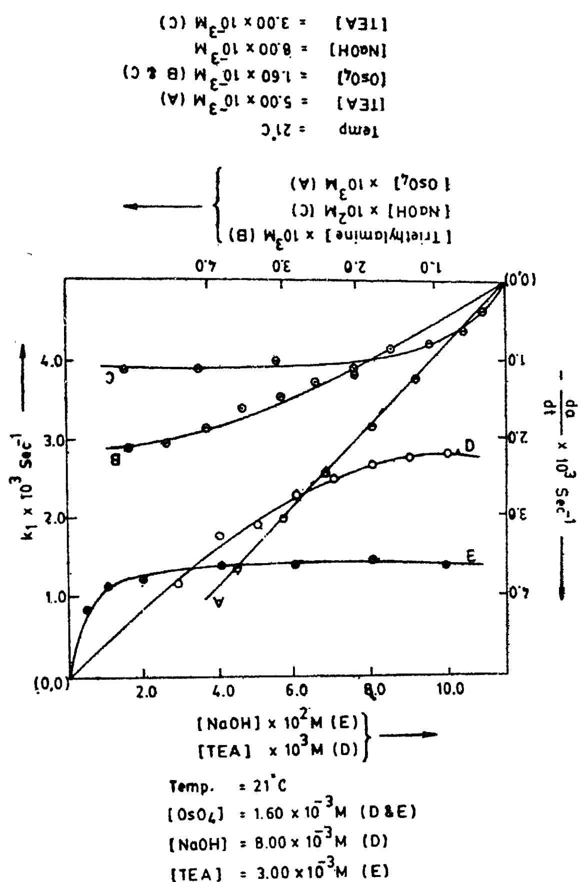


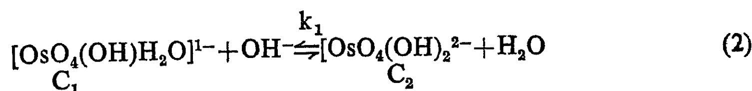
FIG. 1

चित्र 1

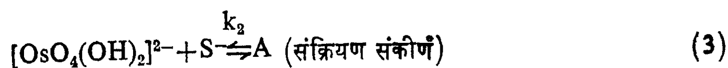
फलतः प्रायोगिक परिणामों तथा उपर्युक्त विवेचना के आधार क्रियाविधि पद का निरूपण निम्नलिखित से किया गया :



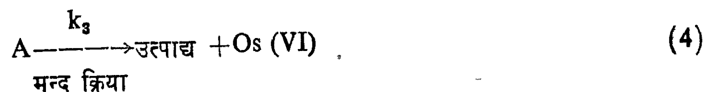
$$S+OH^- \overset{k}{\rightleftharpoons} S^- + H_2O \qquad (1)$$



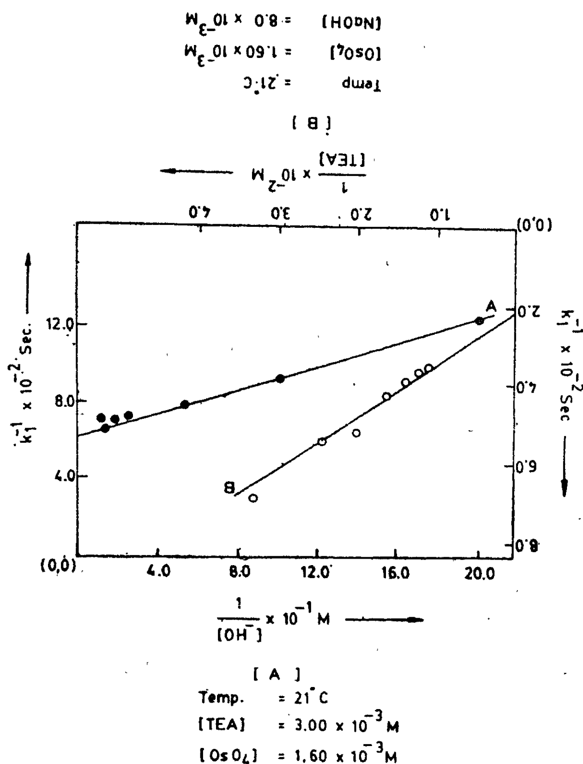
$$\underset{C_1}{[OsO_4(OH)H_2O]^{1-}} + OH^- \overset{k_1}{\rightleftharpoons} \underset{C_2}{[OsO_4(OH)_2^{2-}} + H_2O \qquad (2)$$



$$[OsO_4(OH)_2]^{2-} + S^- \overset{k_2}{\rightleftharpoons} A \text{ (संक्रियण संकीर्ण)} \qquad (3)$$



$$A \xrightarrow[\text{मन्द क्रिया}]{k_3} \text{उत्पाद्य} + Os\ (VI) \qquad (4)$$



चित्र 2

पद (1) (2) तथा (3) से स्पष्ट है कि ऐमीन का प्रारम्भिक आक्सीकरण मुक्तमूलक के बनने के साथ शुरू होता है जो Os(VIII) के साथ क्रिया करके संक्रियण संकीर्ण (A) बनाता है जो वियोजनोपरान्त उत्पाद्य तथा Os(VI) स्पीशीज देता है। चूंकि क्षारीय माध्यम में ऑस्मियम टेट्राक्साइड $[OsO(OH)_2]^{2-}$ तथा $[OsO_4(OH)H_2O]^{1-}$ रूप के आक्टाहेड्रल संकीर्ण प्रदान करता है अतः कुल आस्मियम के तीन रूप, दो Os(VIII) में तथा एक संकीर्ण में प्राप्त होता है। अतएव तथ्यों की सत्यता के आधार पर स्थायी दशा एवं कुछ सन्निकटन करते हुये क्रिया की दर को आक्सीकारक की घटती सान्द्रता के पद निम्नलिखित समी० ($_1$) द्वारा लिखा जा सकता है

$$\frac{-d[Os(VIII)]}{dt} \; \frac{2kk_2k_3[Amine]\,[OH^-]\,[Os(VIII)]_T}{1+kk_2[Amine]\,[OH^-]} \qquad (E_1)$$

जो सभी प्रायोगिक परिणामों की पुष्टि करता है। सभी (E_1) से kk_2k_3 का मान ज्ञात किया गया यथा सभी (E_2) में दिखाया गया है

$$\frac{l_4}{k_1} = \frac{1}{2kk_3k[Amine][OH^-]} + \frac{1}{2k_3} \qquad (E_2)$$

सारणी 1

21° ताप पर क्रिया दर पर आक्सीकारक, ऐमीन तथा हाइड्राक्सिल आयन का प्रभाव

$[O_sO_4] \times 10^3$, M	$[TEA] \times 10^3$ M	$[NaOH] \times 10^3$ M	$-\frac{da}{dt} \times 10^3$ sec^{-1}	$k_1 \times 10^3$ sec^{-1} ग्राफिक	गणना से
1.20	5.00	8.00	1.28	3.55	3.24
1.80	5.20	8.00	1.94	3.22	3.14
2.40	5.00	8.00	2.51	3.17	3.17
3.00	5.00	8.00	3.15	2.54	2.48
3.60	5.00	8.00	3.72	2.58	2.61
1.60	3.00	8.00	0.78	1.24	1.22
1.60	4.00	8.00	1.10	1.82	1.84
1.60	5.00	8.00	1.19	2.05	1.88
1.60	6.00	8.00	1.45	2.30	2.33
1.60	7.00	8.00	1.52	2.68	2.58
1.60	3.00	0.05	0.37	0.80	0.84
1.60	3.00	0.10	0.64	1.11	1.09
1.60	3.00	0.20	0.75	1.25	1.23
1.60	3.00	0.40	1.09	1.47	1.39
1.60	3.00	0.60	1.02	1.46	1.41
1.60	3.00	0.80	1.12	1·58	1.52
1.60	3.00	1.00	1.28	1.54	1.48

सारणी 2

21° ताप KNO_3 के मिलाने पर क्रिया दर पर प्रभाव

$[TEA] = 5.00 \times 10^{-3}M.$, $[NaOH] = 8.00 \times 10^{-3}M$

$[OsO_4] = 2.40 \times 10^{-3}M$

$(\mu)M$	$k_1 \times 10^3$ sec^{-1} ग्राफिक	गणना से
0.05	2.413	2.484
0.10	2.412	2.386
0 20	2.455	2.228
0.30	2.420	2.443

समी० (E_2) से स्पष्ट है कि जब ($1/k_1$) के साथ (1/[Amine]) या ($1/[OH^-]$) का ग्राफ खींचा गया (चित्र 1 सी) तो सीधी रेखा की प्राप्ति हुयी जो Y-अक्ष पर धनात्मक कटाव देती है जिससे ढाल की गणना की गयी। ऐमीन की 3.00×10^{-3}M सान्द्रता पर ($1/k_1$)vs($1/[OH^-]$) ग्राफ से k_1 का मान 16.13×10^{-4} तथा kk_2k_3 का 55.56 आया जब कि ($1/k_1$)vs(1/[Amine]) के ग्राफ से k_1 तथा kk_2k_3 का मान क्रमशः 20.82×10^{-4} अथा 52.08 आया। दोनों प्रकार से प्राप्त k_1 तथा kk_2k_2 का लगभग बराबर मान यह प्रदर्शित करता है कि समी० (E_1) मान्य है। सक्रियण एन्ट्रापी का अल्प धनात्मक मान विपरीत आवेश वाले कणों के बीच क्रिया होना प्रकट करता है जिससे निष्कर्ष यह निकला कि संक्रान्तिक (transition) दशा बहुत ही आवेशित अवस्था में थी।

निर्देश

1. सोलीमोसी, एफ०, 'नेचरवीसेन्स चेफरेन' 1957, **44**, 374
2. सिंह, बी० एन०, सिंह, एच० एस० तथा सक्सेना, बी० बी० एल० 'जर्न० अमेरिकन केमि० सोसा०', 1969, **91**, 2645
3. सिंह, एम० पी० आदि, 'प्रासी० इण्डियन नेश० साइंस एके०', 1975, **41**, 331.
4. कृष्ण, बी० तथा सिंह, एच० एस०, 'जर्न० फिजि० केमि०' 1965, **231**, 399
5. सिंह, भरत तथा सिंह आर० पी० आदि, 'जर्न० इनआर्गे० तथा न्यूक्लियर केमि०' 1981, **43**, 1283.
6. कुक, जे० डब्लू० तथा स्कोन्टेल, आर०, 'नेचर', 1948, 61, 237.
7. वेसुफाइल, पी० जे०, 'बुल० सोसा० केम० फ्रं०' 1969, **4** 166.
8. चंदवानी, बी० एल० तथा मैधानी जी० डी०, 'इन्डि० जर्न० केमि०' 1977 15 ए, 56" जर्न नेचर फोर्स' 1978, 291, 336
9. (अ) सिंह भरत, सिंह, ए० पी० तथा सिंह, ए० के०, 'नेशनल० एके० साइं० लेटर' 1985 **32**, 112

   (ब) मिश्र, आर० के०, सिंह, बी० तथा सिंह, ए० के०, 'जर्न० केमि० सोसा०' 1986, 3A 5712 (प्रेस में)
10. टोय, रेआँन, 'टेट्राहेड्रान' 1964, 2259
11. ग्रिफिथ, डब्लू० पी० 'क्यू० रिव्यू०' 1965, 19, 254

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 31, No. 2-3, 1988

बड़वाह के उत्तर-पूर्व में कार्बोनाटाइट शैलों का अध्ययन

अजय कुमार जैन तथा आर० डी० तापी

[प्राप्त—अक्टूबर 2, 1987]

सारांश

इस क्षेत्र में विस्तृत भू-वैज्ञानिक संरचनात्मक एवं शैलकीय अध्ययन से एक क्षारीय अति अल्पसिलिक कार्बोनाटाइट जटिल की उपस्थिति सिद्ध हुई है। यह जटिल नर्मदा नदी के उत्तर में लगभग 20 वर्ग कि० मी० क्षेत्रफल में विस्तृत है। यह एक अंडाकार आकृति की राशि है जो कैंब्रियन पूर्व शैलसमूह में अन्तर्वेधित है। इस राशि के गिर्द आंशिक मंडलन वलयाकार संरचना के रूप में विकसित हुआ है। यह जटिल ओलिविनाइट, सर्पेंटिनाइट, पाइराक्सिनाइट, नेफिलीन, साइनाइट, नेफिलीन-एपेटाइट शैल एवं कार्बोनेट शैलों से बना है। ड्यूनाइट में व्युत्पन्न शैल सर्पेंटिनाइट और टाल्क फाइलो-नाइट इस जटिल के मध्य भाग में स्थित है, इस जटिल के बाह्यवर्ती भाग में ओलिविन एपेटाइट और नेफिलीन एपेटाइट की शिरायें और भित्तियाँ विशेष रूप से देखी गई हैं। कार्बोनाटाइट शैल मुख्यत: सोवाइट किस्म का है। डोलोमाइट युक्त कार्बोनाटाइट शैल की पश्चशिरायें (Late veins) भी पायी जाती हैं।

यह कार्बोनाटाइट जटिल चोरल नदी के भ्रंश अनुरूप अमिस्थापित हुआ है। यह राशि वितलीय संलक्षणी है जिसमें अति अल्पसिलिक सदस्य, क्षारीय और कार्वोनाटाइट प्रावस्थाओं से अधिक मात्रा में स्थित है। कार्बोनाटाइट प्रावस्थाएँ ज्वालामुखी संलक्षणी में उत्तम रूप से विकसित हैं। यह जटिल क्रिटेशियस आयु के अम्बाडोंगर (गुजरात) में पाये जाने वाले कार्बोनाटाइट जटिल से बहुत साम्यता रखता है। इस जटिल के पूर्व भाग में एपेटाइट का सान्द्रण विशेष रूप से स्पष्ट है। इस जटिल के चारों ओर की मिट्टियों में एपेटाइट और पाइरोक्लोर की उपस्थिति लाक्षणिक है, एपेटाइट प्रमुख रूप से दो शैलों में पाया जाता है, एक मेग्नेटाइट एपेटाइट शैल (10-15 प्रतिशत P_2O_5) और दूसरा फास्फेटिक संकोणाश्म (20-30 प्रतिशत P_2O_5)।

Abstract

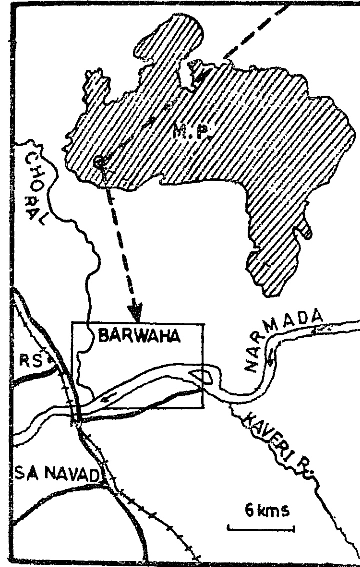
Study of carbonatite in the northeast of Barwah district, Khargone M. P. *By* Ajai Kumar Jain and R. D. Tapi.

An alkaline highly low-silicic carbonate complex has been found to be present in the Barwah district, Khargone (M. P.)

इस क्षेत्र में कई भू-वैज्ञानिकों ने अलग-अलग दृष्टिकोणों से कार्य किया है जैसे—ब्लेनफोर्ड[1], विन और मेलेट[2], बोस[3], शर्मा और रोडे[7], येलुर[12] । रोडे और येलुर ने कार्बोनाटाइट जटिल का विशेष अध्ययन किया है और अम्बाडोंगर के जटिल से साम्यता दर्शाई है ।

बड़वाह से लगभग 3 कि० मी० उत्तर-पूर्व में कार्बोनाटाइट्र जटिल स्थिति है । यह नर्मदा और चोरल नदियों का संगम होता है । यह जटिल भारतीय सर्वेक्षण विभाग के भू आकृतिक मानचित्र (Toposheet) संख्या 55 बी/3, 55 बी/4 में अक्षांश 76° 2′ 30″ तथा 76° 8′ पूर्व और देशांश 22° 12′ तथा 22° 18′ उत्तर के अन्तर्गत आता है । इस जटिल का दृश्यांश कटोरेनुमा गर्त के रूप में है, जिसके चारों ओर विन्ध्य समूह के क्वार्टजाइट और बीजावर श्रेणी के शैलों की पहाड़ियों की श्रृंखलायें हैं (मानचित्र 1)

LOCATION MAP OF THE AREA



MAP 1.

चित्र 1

भू-संरचनात्मक स्थिति :

नर्मदा घाटी के उत्तरी किनारे पर प्राचीनतम कायान्तरित शैल

बीजावर डोलोमाइट, शैल और क्वार्ट्जाइट, विन्ध्य समूह के क्वार्ट्जाइट और शैल पाये जाते हैं । इन शैलों के ऊपर लमेटा और बाघ संस्तर विशेष रूप से चूना शैल स्थित है । उन शैलों के ऊपर

डेक्कन ट्रेप और आन्तरायिक अन्तराट्रेपीय संस्तर पाये जाते हैं। इन चट्टानों में अल्पसिलिक, अति अल्पसिलिक एवं क्षारीय मिति एवं शिरायें अन्तर्वेधित हुई हैं। (मानचित्र 2)

SCALE
GEOLOGICAL MAP OF THE AREA
GEOLOGICAL MAP OF THE AREA
SCALE 1:25,000
BHADLIPURA
JAITGARH
JAVANTIMATA
KOTANWAN
SORTIPURA
KOTESHWAR
N A R M A D A R.
OMKARESHWAR
BARWAHA
DECCAN TRAP
LAMETA
VINDHYAN
BIJAWAR
METAMORPHICS
DECCAN TRAP LAMETA VINDHYAN BIJAWAR METAMORPHICS CARBONATITE

चित्र 2

इस क्षेत्र में प्रमुख संरचनात्मक दिशाएँ : प० उ० प०—पू० द० पू० उ०, प०-द० पू०, उ०-द० पहचानी गई हैं। बीजावर शैलसमूह संवृत वलनों से प्रभावित हुआ है। ये वलन उत्तर की ओर अक्षनति दिखाते हैं, विन्ध्य समूह को क्वार्ट्‌जाइट और शैल भी वलित हुए हैं। ये वलन विवृत उपरिमुखी हैं जिनकी अक्षनति उत्तर-पश्चिम की तरफ न्यूनकोणीय है। नर्मदा घाटी स्वयं रिफ्टभ्रंशित है, जिसके विस्तार की दिशा पूर्व-पश्चिम है। कार्बोनाटाइट जटिल उसके दोनों ओर स्थिति दो प्रमुख भ्रंश यथा चोरल भ्रंश और मदलीपुरा भ्रंशों के मध्य उत्थित भूखण्ड में स्थित है। इन प्रमुख अंशों की दिशा—उ० प०-द० पू० है।

कार्बोनाटाइट शैलों की लाक्षणिक संजाति :

इस शैल जटिल में विकसित प्रमुख प्रकार इस प्रकार हैं :

1. **सर्पेंटीनाइट टाल्क फाइलोनाइट** : जटिल के पूर्व वलय का सीधा सम्पर्क समूह के क्वार्ट्‌जाइट से है और इस वलय से आन्तरिक भाग की ओर टाल्क, फाइलोनाइट, ओलिविनाइट इत्यादि शैल

स्थित हैं। इन शैलों में सर्पेंटीन की पूर्व एवं पश्च शिराएँ मौजूद हैं। सर्पेंटीन में अनेकानेक मेग्नेटाइट शिराएँ अन्तर्वेधित हैं। यह शैल गहरे हरे, रंग से हरे काले रंग का सूक्ष्मकणिक एवं स्थूल हैं। इसमें सर्पेंटीन की सूक्ष्म चरखियाँ मेग्नेटाइट, टाल्क प्रमुख रूप से विद्यमान हैं। टाल्क में सुविकसित शल्कन पाया जाता है। पट्लित और पट्टित संरचना के साथ कार्बोनेट और सर्पेंटीन सहचरित होते हैं। कहीं-कहीं ओलिविन और एंस्टेटाइट के अवशेष भी पाये गये हैं।

2. **इजोलाइट** : जटिल के आंशिक वलय संरचना में इजोलाइट एक प्रमुख शैल है जो ओलिविनाइट और पाइराक्सिनाइट को प्रतिस्थापित करते हैं। यह शैल मुख्य रूप से दीर्घकणिक है और कहीं-कहीं सूक्ष्मकणिक भी है जो नेफिलीन, पाइराक्सीन और मेलानाइट गार्नेट और स्फीन खनिजों से बनी है। नेफिलीन के स्फाट दीर्घकणिक गुलाबी अंश फलकीय से अफलकीय सपाट आकृति के हैं। ये स्फाट अभ्रक और जियोलाइट खनिजों में परिवर्तित हुए हैं। नेफिलीन के स्फाटों में एजिरीन ओगाइट ($Z \wedge C$ 52°±; X=हरा, Z=पीला) की सूचियाँ देखी गई हैं। मेलानाइट खनिज के स्फाट अनियमित आकृति से लेकर पूर्णफलकीय कणों की आकृति प्रकट करते हैं। ये स्फाट कभी-कभी मंडलन दिखाते हैं। शिरा सदृश्य अन्तःक्षेप पाये जाते हैं। अल्प मात्रा में स्फीन खनिज के कण भी देखे गये हैं।

3. **नेफेलीन पारफाइरी सायनाइट** : कार्बोनाटाइट जटिल के वलय में इजोलाइट से सम्बन्धित अनेक नेफिलीन साइनाइट की भित्तियाँ शिराएं और लेंस पाये जाते हैं। पोटाश फेल्सपार पूर्ण रूप से परिवर्तित हो गया है। इसमें प्रमुख रूप से नेफिलीन कैंक्रिनाइट एजिरीन-ओगाइट आदि खनिज पाये गये हैं। पोटाश फेल्सपार के अवशेष कार्ल्सबाद यमलन दिखाते हैं। नेफिलीन के स्फाट बड़े वर्गाकार, सपाट और शैल का 10-15 प्रतिशत भाग बनाते हैं। नेफिलीन के स्फाट पर्थाइट स्फाटों में आंशिक रूप से अन्तर्विष्ट हुए हैं। एजिरीन-ओगाइट बहुधा प्रिज्मीय शलाकाओं के रूप में पाया गया है। यह तीव्र बहुवर्णता दिखाती है (X=गहरा हरा, Z=हरा पीला तथा $X \wedge C$=10°—15°)

कैंक्रिनाइट प्रिज्मीय स्फाट दिखाता है। शैल में बायोटाइट, स्पेटाइट स्फीन और मेग्नेटाइट सूक्ष्मकणों के रूप में पाये गये हैं। नेफिलीन युक्त अन्य शैलों में नेफिलीन पारफाइरी का स्थान प्रमुख है, जिसमें नेफिलीन के लक्ष्य स्फाट (2-3mm) सर्वत्र बिखरे पाये गये हैं। कहीं-कहीं एपेटाइट और मेग्नेटाइट की मात्रा नेफिलीन से बढ़कर देखी गई है। अल्प मात्रा में स्फीन बायोटाइट क्लोराइट खनिज भी पाये गये हैं।

4. **कार्बोनाटाइट** : यह शैल छोटे लेंसाभ राशि के रूप में अथवा भित्तियों के रूप में उपस्थित हैं। ये भित्तियाँ 15-30 mm चौड़ी और 40-70 मीटर लम्बी हैं। कार्बोनाटाइट शैल अति दीर्घकणिक से सूक्ष्मकणिक गठन दिखाता है, केल्साइट के कण अधिकतम 3-10 mm आकार के हैं। केल्साइट के स्फाट अनेक स्थानों पर प्रतिबली विकृतियाँ दिखलाते हैं। पट्टित संरचना, स्फाट मोड़, यमल रेखाओं में मोड़ मंडलन इत्यादि लक्षण प्रमुख हैं। केल्साइट स्फाटों में एपेटाइट, मेग्नेटाइट की शिरायें पाई जाती हैं। केल्साइट के स्फाट भित्तियों के स्थानान्तर

दैशिक विन्यास दिखाते हैं। कार्बोनाटाइट शैल पूर्व एवं पश्च शिरा तथा भित्तयों के रूप में पाया जाता है। केल्साइट एपेटाइट और फ्लोराइट की शिराएँ क्रम से पायी जाती हैं। यह प्रमुख रूप से सोवाइट प्रकार का है, परन्तु इसमें काफी हद तक डोलोमाइट प्रतिस्थापित हुआ है। अधिकतर खनिज समुच्चय (Brögger 1921) सोवाइट प्रकार को इंगित करता है।

भू-रासायनिक लक्षण :

इस क्षेत्र के क्षारीय अल्पसिलिक एवं कार्बोनाटाइट शैलों के विश्लेषणों के परिणाम निम्नलिखित सारणी में दिये गये हैं।

आक्साइड	1	2	3	4	5	6	7	8
SiO_2	11.10	47.65	44.22	54.97	42.20	07.68	05.67	06.12
CO_2	29.73	00.10	06.16	03.58	02.80	36.00	32.16	37.03
TiO_2	00·80	01.46	'02.70	00.42	00.80	00.14	00.50	00.68
Al_2O_3	03.50	19.00	14.47	11.62	16.31	Traces	01.77	01.31
Fe_2O_3	03.17	03.80	03.16	02.56	06.54	08.43	03.88	91.45
FeO	03.60	04.01	07.21	02.59	02.28	—	03.70	—
MnO_2	00.61	00.11	00.27	00.38	00.15	02.23	00.78	05.49
MgO	09.82	03.68	05.39	03.58	02.55	14.83	06.10	00.75
CaO	30.12	08.00	10.94	05.69	09.63	23.96	37.06	12.75
Na_2O	00.42	00.10	01.56	04.37	06.88	00.17	01.09	29.03
K_2O	00.49	07.13	00.24	04.20	01.15	00.02	00.87	02.66
Nb_2O_5	00.19	02.19	—	—	—	00.59	—	—
P_2O_5	03.06	00.25	00.22	0.51	0.34	00.60	01.73	00.14
SO_3	00.51	—	—	—	—	01.43	00.46	00.79
F	—	—	—	—	—	—	—	00.15
BaO	00·36	—	—	—	—	—	00.45	01.08
SrO	00.30	—	—	—	—	—	00.89	03.70
PbO	—	—	—	—	—	—	—	—
S	—	—	—	—	—	—	—	00.11
H_2O	—	—	4.31	4.18	3.72	—	—	00.02

रासायनिक विश्लेषणों से निम्नलिखित बातें स्पष्ट होती हैं :

1. क्षारीय शैलों का संगठन पोटैशियम युक्त की तुलना में सोडियम युक्त अधिक है। शैल में एजिरीन औगाइट की उपस्थिति और पोटाश फेल्सपार की नगण्य मात्रा से यह तथ्य स्पष्ट हो जाता है।

2. कार्बोनाटाइट शैल के निर्माण में डोलोमाइट का योगदान महत्वपूर्ण है। शैल में (MgO) की बहुल्य मात्रा और शैल के बहुलक विश्लेषण (Modal Analysis) में डोलोमाइट की बहुलता इस तथ्य की परिचायक है।

3. इन शैलों में सिलिका की मात्रा अल्प तथा $Fe_2O_3 : FeO$ अनुपात भी न्यून है, जैसा कि अम्बाडोंगर के शैल विश्लेषणों में भी देखा गया है।

4. इस क्षेत्र के शैलों में BaO, SrO, SO_3 नगण्य मात्रा में हैं, जिससे यह बात स्पष्ट हो जाती है कि इनमें बेराइट खनिज अनुपस्थित है। अम्बाडोंगर के जटिल के साहचर्य में बेराइट खनिज की उपस्थिति विभेदात्मक है।

5. ये कार्बोनाटाइट शैल फ्लोराइट खनिज युक्त है। अम्बाडोंगर कार्बोनाटाइट की तुलना में इस क्षेत्र में फ्लोराइट की उपस्थिति अति अल्प है।

इन कार्बोनाटाइट शैलों में दुर्लभ मृदा धातु और रेडियोधर्मी तत्व भी पाये गये हैं। कुछ नमूने गीगर-मूलर काउन्टर द्वारा परीक्षित किये गये। इन तत्वों का रासायनिक विश्लेषण संभव नहीं था। इसमें वास्तविक गिनती, पृष्ठभूमि गिनती से 3-4 गुना अधिक थी।

जब हम बड़वाह और अम्बाडोंगर के कार्बोनाटाइट की तुलना करते हैं तो पाते हैं कि अम्बाडोंगर में कार्बोनाटाइट ज्यादा डोलोमाइटिक है, जो कि बेराइट की अनुपस्थिति और फ्लोराइट की अल्प उपस्थिति से लाक्षणिक होता है।

कार्बोनाटाइट शैलों का विकास :

बड़वाह कार्बोनाटाइट जटिल के विकास की प्रमुख अवस्थाएँ निम्नवत् हैं :

1. **अति अल्पसिलिक शैलों का अन्तर्वेधन** : बड़वाह क्षेत्र में सुरतीपुरा तालाब के निकट टाल्क, फाइलाइट तथा सर्पेंटिनाइट के दृश्यांश उपलब्ध है। इनके सूक्ष्मदर्शीय अध्ययन से विदित होता है कि ये मूलतः ड्यूनाइट शैल थी जो गम्भीर गहराई में अन्तर्वेधित हुई थी। यहाँ तक कि प्लेजियोक्लेज, पाइराक्सीन एवं ओलिविन के अवशेष स्फाट भी मुश्किल से पहचाने जाते हैं। इन शैलों के दृश्यांश अति सीमित क्षेत्र में दिखाई देते हैं, लेकिन ऐसी अपेक्षा की जाती है कि गहराइयों में इन शैलों की विस्तृत राशियाँ उत्तर की तरफ फैली हुई होंगी।

2. **स्वतत्वांतरण** : पूर्व विकसित क्षारीय अति अल्पसिलिक शैल अत्यधिक सीमा तक ऊष्म वाष्पीय तरलों द्वारा किये गये स्वतत्वांतरण से प्रभावित हुए हैं।

(अ) **क्षारीय स्वतत्वांतरण** : क्षार विशेष रूप से Na_2O खनिजों की जातियों में प्रविष्ट किये गये हैं, जिसके फलस्वरूप शैल खनिजों का संगठन क्षारीय हो गया है। सोडा पायराक्सीन क्षारीय अभ्रक और नेफिलीन खनिज शैलों में वृहत स्थान पाते हैं। ये खनिज शैलों के मूल घटकों का प्रतिस्थापन करते हैं।

(ब) **एल्बाइटी भवन** : अल्पसिलिक और अति अल्पसिलिक शैलों के कैल्सियम भी प्लेजियोक्लेज फेल्सपार एल्बाइट खनिज में परिवर्तित हुए हैं।

(स) **एपिडोटिकरण** : केल्सियमी प्लेजियोक्लेज और मेग्नीशियमी ओलिवीन के परिवर्तन से एपिडोट खनिज की उत्पत्ति हुई है। अति अल्पसिलिक शैलों में एपिडोट खनिज की शिराएँ पाई गई हैं।

(द) **नेफिलीनीकरण और फेनाइटीभवन** : फेनाइटीभवन एक ऐसी प्रक्रिया है जिसमें किसी भी प्रकार के मूल शैल का रूपांतरण नेफिलीन शैल में हो जाता है, जो सायनाइट शैल से साम्य रखती है। वृहत पैमाने पर नेफिलीनीकरण होने का पता चलता है, क्योंकि नेफिलीन खनिज कार्बोनाटाइट से सम्बन्धित प्रत्येक शैल प्रकार में अनिवार्य रूप से देखा गया है।

(इ) **एपेटाइटीभवन** : कार्बोनाटाइट शैलों में एपेटाइट और मेग्नेटाइट खनिज पूर्ववर्ती केल्साइट एवं अन्य खनिजों का प्रतिस्थापन करते हैं। इन खनिजों की शिराएँ एवं मित्तियाँ कार्बोनाटाइट की विभिन्न प्रावस्थाओं में मौजूद हैं।

(फ) **टाल्कोसि भवन और सर्पेटीनीभवन** : अति अल्पसिलिक शैलों के ओलिवीन और आर्थो-पायराक्सीन खनिजों का प्रतिस्थापन सर्पेटीन द्वारा और कहीं पर टाल्क द्वारा हुआ है।

(प) **कार्बोनाटाइटीकरण और डोलोमाइटी भवन** : प्राचीनतर अन्तर्वेधी राशियों एवं शिस्टाभ शैलों पर केल्सियमी तरल एवं कार्बोनेट धूम्रों की प्रतिक्रिया हुई है, जिसके फलस्वरूप पूर्ववर्ती खनिज पूरी तरह से कार्बोनेट द्वारा प्रतिस्थापित हो गये हैं। पूर्ववर्ती कार्बोना-टाइट केल्साइटी है, किन्तु तदनन्तर की प्रावस्था में डोलोमाइट द्वारा केल्साइट का प्रतिस्थापन हुआ है।

3. **अपदलनी कायांतरण एवं उसके प्रभाव** : पूर्व एवं पश्च अन्तर्वेधनों और उत्सर्जनों द्वारा क्षेत्रीय शैलों का अत्यधिक विरूपण हुआ है। ये शैल गुम्बदाकार आकृति में उत्थित हो गये हैं। इनका विदारण संदलन और संकोणाश्मीभवन हुआ है। संकोणाश्म के छिद्र उपरान्ति क्षारीय तथा कार्बोनेट युक्त तरलों से भर गये थे। इस संकोणाश्म में शैलों की विभिन्न जातियाँ मैग्नीय पदार्थ में अग्निजात शैल कणों के साथ गड़ी हुई पायी जाती हैं। अपदलनी कायान्तरण युग्मीय प्रतिबलों के कारण संकोणाश्मीभवन से घनिष्ट सम्बन्ध रखता है। शिस्टाभता, पट्टित संरचना, केल्साइट स्फाटों का सपाटीकरण, उनका दैशिक विन्यास इत्यादि विशिष्ट प्रभाव कहे जा सकते हैं। सूक्ष्मदर्शी में केल्साइट, ओलिवीन, मेग्नेटाइट, प्लेजियोक्लेज इत्यादि स्फाटों का विखण्डी-

करण, उनमें असंगत प्रकाशीय लक्षण स्फाटों के विदलन और यमल पट्टिकाओं का विरूपण इत्यादि प्रभाव स्पष्ट देखे गये हैं। पूर्ववर्ती शिराएँ विदारण और विसर्पण से प्रभावित हुई हैं।

कार्बोनाटाइट जटिल की उपस्थिति और नर्मदा घाटी की रिफ्ट संरचना का जनन सम्बन्धी घनिष्ट सम्बन्ध है। ये कार्बोनाटाइट शैल थोलिआइट बेसाल्ट के साहचर्य में पाये गये हैं। विलादकर[11] के अनुसार कार्बोनाटाइट जटिल के क्षारीय शैलों का उद्गम नेफिलीन युक्त मेग्मा से माना गया है। येलुर[12] के अनुसार अम्बाडोंगर का कार्बोनाटाइट का निर्माण अल्पसिलिक के स्थानीय विभेदन से निर्मित अम्लीय क्षारीय व माध्यमिक आग्नेय शैलों द्वारा हुआ है। ये विभेदन के प्रारूप डेक्कन ट्रेप ज्वालामुखीय प्रक्रम की पश्च प्रावस्था को इंगित करते हैं और कार्बोनाटाइ जटिल उत्पत्ति के लिए उत्तरदायी हैं।

निर्देश

1. 'ब्लेनफोर्ड, 'मे० जि० स० इ०' 1968, 6, 163-384.
2. ब्रोगर, 1906, 1921.
3. बोस, पी० एन०, 'मे० जि० स० ई०' 1884, 21, 1-72.
4. बोस, पी० एन०, 'मे० जि० स० इ०' 1908, 27, 162.
5. कापुस्टिन, यू० ल०, रूस पब्लीकेशन मास्को 1971.
6. रोड़े पी० पी०, तीसरी इ० जि० का (संक्षेप) भू विज्ञान विभाग पूना वि० वि० (1980)
7. शर्मा और रोडे, 'करेन्ट साइंस' 1966, 35, 411-412.
8. सुखेसवाला और उधास, 'सा० और क०' 1963, 29, 563-568.
9. सुखेसवाला और उधास, 'इ० जि० का०-प्लेट 7, 1964, 10-13.
10. विलादकर, एस० जी०, 'अप्रकाशित पी०एच०डी थीसिस बाम्बे वि० वि०' 1921,
11. विलादकर, एस० जी०, 'इंडियन मिनरासाजिस्ट सुखेसवाला वालूम' 1984, 130-135.
12. येलुर डी० डी० 'ज० जि० सोसाइटी' 1968, 9, संख्या 2, 118-123.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 31. No. 2-3, 1988

युगपत अवकल समीकरणों से सम्बद्ध आइगेन सदिशों का सिद्धान्त

एस० एन० सिंह तथा आर० सिंह
परास्नातक गणित विभाग, महाराजा कालेज, आरा (बिहार)

[प्राप्त—जनवरी 2, 1988]

सारांश

प्रस्तुत टिप्पणी में युगपत समीकरणों से सम्बद्ध आइगेन सदिशों की उपस्थिति तथा अद्वितीयता का वर्णन हुआ है।

Abstract

Theory of Eigen vectors associated with simultaneous differential equations. *By* S. N. Singh, and R. Singh, Postgraduate Department of Mathematics, Maharaja College, Arrah (Bihar).

The present note aims at the existence and uniqueness theorem of Eigen vectors associated with simultaneous differential equations given in (1.1). Next part of the note follows with the construction of the Green's formula with the help of our well defined operator (1.2). Indeed some properties associated with bilinear concomitant can very easily be deduced which can draw special interest in the field of differential equations and their solutions.

1. निर्मेय की परिभाषा

आगे हम अवकल समीकरणों

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d^2u}{dx^2}+p(x)\,u+r(x)\,v&=-\lambda u,\\ i\,\frac{dv}{dx}+q(x)\,v+r(x)\,u&=-\lambda v \end{aligned}\right| \tag{1.1}$$

तथा मैट्रिक्स अवकल अपरेटर

$$L=\begin{bmatrix} -\frac{d^2}{dx^2}+p(x) & r(x) \\ r(x) & i\frac{d}{dx}+q(x) \end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

पर विचार करेंगे जहाँ u तथा v फलन हैं x के ।

हम सदिश(वेक्टर) ϕ को स्तम्भ मैट्रिक्स $\phi=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ द्वारा परिभाषा करते हैं जिसके हेतु (1.1) द्वारा परिभाषाषित अवकल समीकरण तुरन्त निम्नलिखित में समानीत हो जाता है

$$L\phi=-\lambda\phi \tag{1.3}$$

जहाँ λ वास्तविक या जटिल प्राचल के लिए आया है और p, q, r^2 वास्तविक मान वाले x के फलन हैं जो $[a, b]$ में संतत हैं ।

अब, हम निम्नलिखित परिसीमा प्रतिबन्ध प्रस्तावित करते हैं

$$u'(a)=0, \quad v(a)-v(b)=0, \quad u'(b)=0 \tag{1.4}$$

जिससे हमारा परिसीमा मान निर्मेय पूरा हो जाय ।

2. प्रमेय : अवकल समीकरण $L\phi=-\lambda\phi$ (1.1) से हल

$$\phi(x, \lambda)=\begin{pmatrix}u(x, \lambda)\\v(x, \lambda)\end{pmatrix}$$

प्राप्त होता है जो अद्वितीय है और निम्नलिखित की तुष्टि करता है

$$u(a)=A, \quad u'(a)=B, \quad v(a)=C \tag{2.1}$$

जहाँ A, B, C यादृच्छिक अचर हैं—चाहे वास्तविक हो या जटिल और सारे डैश x के प्रति अवकलन को बतलाते हैं तथा $u(x)$, $u'(x)$, $v(x)$ सभी जटिल चर λ के समाकल फलन हैं

$$\forall x \in [a, b]$$

उपपत्ति ; हम निम्नलिखित पर विचार करेंगे

$$y_0(x)=C, \; z_0(x)=A+B(x-a), \tag{2.2}$$

$$y_n(x)=y_0(x)=-\frac{1}{i}\int_a^x \{(q(t)+\lambda)\, y_{n-1}(t)+r(t)\, z_{n-1}(t)\}\, dt \tag{2.3}$$

तथा

$$z_n(x) = z_0(x) + \int_{\alpha}^{x} \{(p(t)+\lambda)\, z_{n-1}(t) + r(t)\, y_{n-1}(t)\}\, (x-t)\, dt \tag{2.4}$$

$$[n=1, 2, 3, \ldots]$$

जहाँ

$$|y_0(x)|,\ |z_0(x)| \leqslant .\ K,\ p(x),\ q(x),\ r(x) \leqslant M,\ |\lambda| \leqslant N \text{ तथा } x \in [a, b] \tag{2.5}$$

$n=1$ होने पर समीकरण (2.3) से मिलेगा—

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leqslant KR(x-a)$$

यदि $R=2M+N$ रखें तथा (2.5) का प्रयोग करें।

इसी तरह

$$|z_1(x) - z_0(x)| < RK(b-a)\,(x-a).$$

$n \geqslant 2$ के लिए हम प्राप्त करते हैं

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| < R \int_{\alpha}^{x} \{|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| + |z_{n-1}(t) - z_{n-2}(t)|\}\, dt$$

तथा

$$|z_n(x) - z_{n-1}(x)| < (b-a)\, R \int_{a}^{x} \{(z_{n-1}(t) - z_{n-2}(t)| + |y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)|\}\, dt$$

$$\therefore \quad |y_2(x) - y_1(x)| < R^2 K (1+b-a)\, \frac{(x-a)^2}{2!}.$$

$$|z_2(x) - z_1(x)| < R^2 K (b-a)\, (1+b-a)\, \frac{(x-a)^2}{2!}.$$

$$|y_3(x) - y_2(x)| < R^3 K (1+b-a)^2\, \frac{(x-a)^3}{3!}.$$

$$|z_3(x) - z_2(x)| < R^3 K (b-a)\, (1+b-a)^2\, \frac{(x-a)^3}{3!}.$$

अतः सामान्य तौर पर

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| < R^n K\, \frac{(x-a)^n}{n!} \,.\, (1+b-a)^{n-1} \tag{2.6}$$

तथा

$$|z_n(x) - z_{n-1}(x)| < R^n K \frac{(x-a)^n}{n!}\, (b-a)\, (1+b-a)^{n-1} \tag{2.7}$$

अपरंच, हम प्रस्तावित करते हैं :

$$u(x)=z_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\{z_n(x)-z_{n-1}(x)\}, \tag{2.8}$$

$$v(x)=y_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\{y_n(x)-y_{n-1}(x)\}. \tag{2.9}$$

स्पष्ट है कि (2.8) तथा (2.9) में प्रत्येक श्रेणी समान रूप से तथा परम रूप से $x \in [a, b]$ तथा $|\lambda| \leqslant N$ के लिए अभिसारी है।

(2.3) तथा (2.4) के अवकलन से

$$y'_n(x)=-\frac{1}{i}\{(q(x)+\lambda)\, y_{n-1}(x)+r(x)\, z_{n-1}(x)\}, \tag{2.10}$$

$$z'_n(x)=B+\int_{\alpha}^{x}\{(p(t)+\lambda)\, z_{n-1}(t)+r(t)\, y_{n-1}(t)\}\, dt, \tag{2.11}$$

$$z''_n(x)=\{p(x)+\lambda\}\, z_{n-1}(x)+r(x)\, y_{n-1}(x) \tag{2.12}$$

तथा $y'_{n-1}(x)$, $z'_{n-1}(x)$ एवं $z''_{n-1}(x)$ के लिये भी इसी प्रकार के व्यंजक हैं।

$n \geqslant 1$ के लिये हमें प्राप्त होता है—

$$|y'_n(x)-y'_{n-1}(x)| \leqslant KR^{n-1}(x-\alpha)^{n-1}\frac{(1+b-a)^{n-2}}{n-1!}\{M+N+M(b-a)\}, \tag{2.13}$$

$$|z'_n(x)-z'_{n-1}(x)| \leqslant KR^{n-1}\frac{(1+b-a)^{n-2}}{n-2!}(x-\alpha)^{n-2}\{M+N)(b-a)+M\} \tag{2.14}$$

तथा

$$|z''_n(x)-z''_{n-1}(x)| \leqslant KR^{n-1}(1+b-a)^{n-2}\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{n-1!}\{(M+N)(b-a)+M\} \tag{2.15}$$

स्पष्टतः निम्नलिखित सारी श्रेणियाँ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{y_n(x)-y_{n-1}(x)\},\ \sum_{n=1}^{\infty}\{z_n(x)-z_{n-1}(x)\},\ \sum_{n=1}^{\infty}\{y'_n(x)-y'_{n-1}(\alpha)\},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{z'_n(x)-z'_{n-1}(x)\},\ \sum_{n=1}^{\infty}\{z''_n(x)-z''_{n-1}(x)\}$$

परम तथा समान रूप से अभिसारी हैं $x \in [a, b]$ तथा $|\lambda| \leqslant N$ के लिये जैसा कि (2.6), (2.7), (2.12), (2.13) तथा (2.14), (2.15) से स्पष्ट है।

पुनः (2.8) प्रदान करता है

$$u''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\{z''_n(x)-z''_{n-1}(x)\}$$

$$=(p(x)+\lambda)\sum_{n=1}^{\infty}\{z_{n-1}(x)-z_{n-2}(x)\}+r(x)\sum_{n=1}^{\infty}\{y_{n-1}(x)-y_{n-2}(x)\}$$

$$=(p(x)+\lambda)\{z_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(z_n(x)-z_{n-1}(x)\}$$

$$+r(x)\{y_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(y_n(x)-y_{n-1}(x)\}$$

जो (2.16) में समानीत हो जाता है—

$$-u''(x)+p(x)\,u(x)+r(x)\,v(x)=-\lambda\,v(x). \qquad (2.16)$$

ऐसी ही विधि से तुरन्त हमें (2.17) प्राप्त होता है

$$i\,v'(x)+q(x)\,v(x)+r(x)\,u(x)=-\lambda\,v(x). \qquad (2.17)$$

इसी तरह $\phi(x)=\begin{pmatrix}u(x)\\v(x)\end{pmatrix}$

(1.1) तथा प्रारम्भिक प्रतिबन्धों (2.1) को तुष्ट करता है जो (2.15), (2.16) तथा $u(x)$ एवं $v(x)$ की परिभाषाओं से स्पष्ट है। स्पष्टतः $u(x)$, $u'(x)$, $v(x)$ सभी λ के समाकल फलन है।

अब यह प्रदर्शित करने के लिये कि वेक्टर $\phi(x)$ अद्वितीय है हम वेक्टरों

$$\phi_1=\begin{pmatrix}u_1\\v_1\end{pmatrix} \text{ तथा } \phi_2=\begin{pmatrix}u_2\\v_2\end{pmatrix}$$

पर विचार करेंगे जो (1.1) के हल होने के साथ-साथ (2.1) की तुष्टि भी करते हैं। हमारी धारणा है कि वेक्टर

$$\theta=\begin{pmatrix}\theta_1\\\theta_2\end{pmatrix}=\phi_1-\phi_2=\begin{pmatrix}u_1-u_2\\v_1-v_2\end{pmatrix}$$

तुष्टि करते हैं (1.1) तथा शून्य प्रारम्भिक प्रतिबन्धों

$$\theta_1(a)=0,\ \theta'_1(a)=0,\ \theta_2(a)=0$$

की $a \in [a, b]$, के लिये जिससे यह पता चलता है कि $\phi_1(x)-\phi_2(x)$ तुच्छ हल है और इस तरह

$$\phi_1(x)=\phi_2(x).$$

इससे प्रमेय की उपपत्ति स्थापित हो जाती है ।

3. द्विरैखिक सहगामी तथा ग्रीन का सूत्र

माना कि

$$\phi_j=\begin{pmatrix} u_j(x, \lambda) \\ v_j(x, \lambda) \end{pmatrix}$$

तथा

$$\phi_k=\begin{pmatrix} u_k(x, \lambda) \\ v_k(x, \lambda) \end{pmatrix}$$

(1.3) के दो हल हैं जहाँ ϕ_j तथा ϕ_k जटिल मूल्य वाले वेक्टर हैं तथा u_j, v_j, u_k, v_k जटिल फलन हैं x के तथा सारे u एवं v व्युत्पन्न क्रमशः द्वितीय तथा प्रथम कोटि तक होते हैं ।

हम देखते हैं कि

$$\bar{\phi}^T{}_{k_0}\, L\phi_j=-u''_j\, \bar{u}_k+p\, u_j\, \bar{u}_k+r\, v_j\, \bar{u}_k+r\, u_j\bar{v}_k$$
$$+i\, v'_j\bar{v}_k+i\, v_j\bar{v}_k$$

तथा ऐसा ही व्यंजक

$$\phi^T{}_j\, \overline{L\phi_k}=-\bar{u}_k''\, u_j+pu_j\, \bar{u}_k+ru_j\, \bar{v}_k+rv_j\, \bar{u}_k-i\, v_j\, \bar{v}'_k+q\, v_j\, \bar{v}_k,$$

जहाँ पड़ी रेखा जटिल कांजुगेट के लिये आई है और T सूचित करता है परिवर्त (ट्रांसपोज) को । अतएव हमें सरलता से निम्नलिखित प्राप्त होते हैं—

$$\bar{\phi}^T{}_k\, L\phi_j-\phi^T{}_j\, \overline{L\phi_k}=u_j\, \bar{u}''_k-u''_j\, \bar{u}_k+i\, (v'_j\, \bar{v}_k+v_j\, \bar{v}'_k)$$

$$=\frac{d}{dx}\, (u_j\, \bar{u}'_k-u'_j\, \bar{u}_k+i\, v_j\, \bar{v}_k)=\frac{d}{dx}\, [\phi_j, \phi_k] \tag{3.1}$$

जहाँ

$$[\phi_j, \phi_k] = u_j \bar{u}'_k - u'_j \bar{u}_k + i\, v_j \bar{v}_k \tag{3.2}$$

(3.1) का समाकलन करने से

$$\int_a^b (\bar{\phi}^T{}_k L\phi_j - \phi^T{}_j \overline{L\phi_k})\, dx = [\phi_j, \phi_k](b) - [\phi_j, \phi_k](a) \tag{3.3}$$

(3.1), (3.2) तथा (3.3) को क्रमशः लाग्रांज, तत्समक द्विरैखिक सहगामी तथा ग्रीन का सूत्र कहते हैं।

द्विरैखिक सहगामी के गुण

(i) यदि $\phi_j(x, \lambda)$ तथा $\phi_k(x, \lambda)$ दो हल हों (1.3) के λ के एक ही मान के तब

$[\phi_j(x, \lambda), \phi_k(x, \bar{\lambda})]$ स्वतन्त्र होता है x से।

(ii) $[\phi_j(x, \lambda), \phi_k(x, \lambda)] = -\overline{[\phi_k(x, \lambda), \phi_j(x, \lambda)]}$.

(iii) $[\phi_j(x, \lambda), \phi_j(x, \lambda)]$ शुद्ध रूप से काल्पनिक है।

(iv) $[\phi_j(x, \lambda), \phi_k(x, \lambda)]$ एक अर्द्ध द्विरैखिक रूप है जो निम्नवत् होता है

(a) $[\phi_j + \phi_k, \phi_l] = [\phi_j, \phi_l] + [\phi_k, \phi_l]$

(b) $[\phi_j, \phi_k + \phi_l] = [\phi_j, \phi_k] + [\phi_j, \phi_l]$

तथा

(c) $[\alpha\phi_j, \beta\phi_k] = \alpha\bar{\beta}[\phi_j, \phi_k]$

जहाँ α, β वास्तविक या जटिल अचर हैं।

उपर्युक्त गुणों की उपपत्तियाँ आसानी से स्थापित की जा सकती हैं।

निर्देश

1. टिशमार्श, ई० सी०, Eigen function expansions associated with second order differential equations. Part I (2nd ed., Oxford), 1962

2. कार्डिगटन, ई० ए० तथा लेविन्सन, एन०, Theory of ordinary differential equations (Newyork), 1955.

3. एवेरिट, डब्लू० एन०, J. Lond. Math. Soc., 1962, 37, 372-384.

4. ईस्थाम, एम० एस० पी०, Theory of ordinary differential equations, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1970

5. डफ, जी० एफ० डी० तथा नायलोर, डी०, Differential eqnations of applied Mathematics, John Willey and Sons, 1966.

6. मार्टिनब्रॉन , Differential equations and their applications, Springer-International, Narosa, Publishing House, New Delhi, 1978.

7. सागन, एच०, Boundary and Eigen value problem in Mathematical Physics, Wiley Newyork, 1961.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 31, No. 2-3, 1988

बिहार में छोटा नागपुर क्षेत्र के बिरहोर के कुछ जेनेटिक लक्षणों का अध्ययन

चतुर्भुज साहु
मानव विज्ञान विभाग, गिरिडीह कालेज, गिरिडीह (बिहार)

[प्राप्त—अगस्त 20, 1987]

सारांश

प्रस्तुत अध्ययन 181 (कुल जनसंख्या का 5% से ज्यादा) बिरहोर तथा 209 हिन्दू जाति के पाँच आनुवंशिक लक्षणों जैसे—कान की मैल (सेरूमेन) के प्रकार (सूखा एवं गीला), हाथ लिपटाने (क्लैस्प) की विधि तथा बाँह मोड़ने (फोल्ड) की विधि (दाँया/बाँया और बाँया/दाँया), कान के निचले मुलायम पालि (इयर लोब) (जुटा हुआ एवं स्वतन्त्र) एवं कर्णकेश (होने न होने) का एक आनुवंशिक सर्वेक्षण है। कान का गीला मैल बिरहोर जनजाति में अत्यधिक पाया जाता है। इसकी बारम्बारता मर्द में 75.0% तथा औरत में 81.5% है। ठीक इसके विपरीत, इस क्षेत्र की हिन्दू जाति में गीला कान का मैल कम पाया जाता है। इसकी बारम्बारता मर्द में 36.1% तथा औरत में 51.5% है। ψ^2 जाँच से पता चलता है कि बिरहोर तथा हिन्दू जाति में महत्वपूर्ण अन्तर है ($P>0.001$)। बिरहोर में बाँया/दाँया प्रकार से हाथ लिपटाने की घटना 59.2% है जबकि हिन्दू जाति में 47.8% है। इस लक्षण में भी इन दोनों जातियों में महत्वपूर्ण अन्तर पाया गया है ($P<0.05$)। बाँह मोड़ने की प्रक्रिया में दोनों ही जातियों में बाँये प्रकार के व्यक्ति अधिक पाये गये हैं लेकिन इनमें कोई महत्वपूर्ण अन्तर नहीं पाया गया। कान के पालि एवं कर्णकेश लक्षणों में दोनों ही जातियाँ एकसमान हैं। इन आंकड़ों की तुलना दूसरी भारतीय जातियों से की गयी है।

Abstract

Study of some genetic traits among the Birhors of Chotanagpur region, Bihar. *By* Chaturbhuj Sahu, Department of Anthropology, Giridih College, Giridih (Bihar).

A genetic survey of five genetic markers i. e. cerumen types (dry and wet), hand clasping and arm folding (R/L and L/R), ear lobe (attached and free) and

hairy ear (presence or absence of hairs on the ear pinna) has been made on 181 (more than 5% of the total population) Birhors and 209 non-tribal Hindu caste. The occurrence of wet cerumen was quite prevalent in the Birhors with a frequency of 75.0% in the males and 81.5% in females while non-tribal Hindu caste had a lower frequency 36.1% in males and 51.5% in females. The ψ^2 test revealed a significant difference between the Birhors and the non-tribal Hindu caste ($P>0.001$). The incidence of L/R type hand clasping among the Birhors was 59.2% and 47.8% in Hindu caste. They differ among themselves in this trait also ($P<0.05$). Regarding arm folding L/R type individuals were more frequent in both the groups but no significant difference was found among them. The Birhors and the Hindu caste are identical in the traits of ear lobe and hairy ear. The data have been discussed and compared with other Indian groups.

बिरहोर एक घुमन्तू जनजाति है जो छोटा नागपुर पठार के पहाड़ी तथा जंगली क्षेत्रों में पायी जाती है। इनकी जनसंख्या मात्र 3464 है। आजकल विश्व के विभिन्न समुदायों में कुछ आनुवंशिक चिन्हों के आँकड़ें अधिक मात्रा में उपलब्ध हैं, परन्तु, तुलनात्मक रूप में भारत में बहुत ही कम शोधकार्य हुआ है। मुण्डा और उराँव जनजातियों के त्वचीय प्रतिरूप पर कुछ कार्य हुआ है [1,4,10]। गुप्ता, दत्ता तथा सरकार[6] ने बिरहोर एवं असुर जनजाति पर कार्य किया है जिसके अन्तर्गत उन्होंने उनकी अँगुलियों के चिन्हों का अध्ययन प्रस्तुत किया है। प्रस्तुत शोधकार्य बिहार के छोटा नागपुर क्षेत्र की बिरहोर जनजाति एवं हिन्दू जाति के पाँच आनुवंशिक लक्षणों जैसे—कान का मैल (सेरूमेन) के प्रकार (सूखी एव गीली), हाथ लिपटाने (क्लैस्प) का तरीका तथा बाँह मोड़ने (फोल्ड) का तरीका (दाँया/बाँया और बाँया/दाँया), कान का निचला मुलायम पालि (इयर लोब) (जुटा हुआ एव स्वतन्त्र) एवं कर्णकेश (होने न होने) का एक तुलनात्मक अध्ययन है। साथ ही साथ इस अध्ययन से पता चलता है कि इस आदिम जनजाति में इन आनुवंशिक लक्षणों का वितरण तथा जीन का बहाव कैसा है।

प्रयोगात्मक

इन आनुवंशिक लक्षणों के लिये सभी उम्र के 181 (कुल जनसंख्या का 5% से ज्यादा) व्यक्तियों की जाँच की गई है। वे व्यक्ति चलकरी, डुमरी, बनासो, चलंगा एवं हुँफुवा टाँडा के थे। कान के मैल के प्रकार का पता लगाने के लिये धातु की एक छोटी पतली छड़ी की सहायता से दोनों कानों की गुहा से मैल निकाला गया। हाथ लपेटने तथा बाँह मोड़ने की पद्धति का पता लगाने के लिये साधारण तरीके से व्यक्ति को हाथ लपेटने और बाँह मोड़ने के लिये कहा जाता है और देखा जाता है कि दाँया हाथ या बाँह ऊपर है या बाँया हाथ। इस क्रिया को तीन बार दुहराया जाता है। इसके अलावा कान की निचली मुलायम पालि को देखते हैं कि वह स्वतन्त्र है या सटी हुई तथा कान में कर्णकेश है या नहीं इसका भी अवलोकन करते हैं। ψ^2 (काई वर्ग) वुल्फ[11] के जी-सारणी के व्यवहार से निकाला गया है और सम्भावनाएँ फिशर तथा येट्स[5] के आधार पर प्राप्त की गई हैं।

सारणी 1

जनजाति एवं हिन्दू जाति में कुछ आनुवंशिक लक्षणों का प्रतिशत

जनसंख्या समूह	संख्या	लक्षण: कर्णमैल		हाथ लपटाना		बाँह मोड़ना		कर्ण पालि		कर्णकेश	
		सूखा	गीला	दाँया/बाँया	बाँया/दाँया	दाँया/बाँया	बाँया/दाँय	जुटा हुआ	स्वतंत्र	अनुपस्थित	उपस्थित
बिरहोर जनजाति											
मर्द	100	25 (25.0%*)	75 (75.0%*)	40 (40.0%)	60 (60.0%)	34 (34.0%)	66 (66.0%)	36 (36.0%)	64 (64.0%)	96 (96.0%)	4 (4.0%)
औरत	81	15 (18 5%*)	66 (81.5%*)	34 (42.0%*)	47 (58.0%)	38 (47.0%)	43 (53.0%)	33 (40.8%)	48 (59.2%	81 (100.0%)	0 (0.0%)
योग	181	40 (22.1%*)	141 (77.9%*)	74 (40.8%*)	107 (59.2%*)	72 (40.0%)	109 (60.0%)	69 (38.1%)	112 (61.9%)	177 (97.8%)	(2.2%)
हिन्दू जाति											
मर्द	141	93 (65.9%)	48 (34.1%)	69 (48.9%)	72 (51.1%)	57 (40.5%)	84 (59.5%)	53 (37.6%)	88 (62.4%)	132 (93.6%)	9 (6.4%)
औरत	68	33 (48.6%)	35 (51.4%)	40 (58.8%*)	28 (41.2%*)	30 (44.2%)	38 (55.8%)	21 (30.9%)	47 (69.1%)	68 (100.0%)	0 (0.0%)
योग	209	126 (60.3%*)	83 (39.7%*)	109 (52.2%*)	100 (47.8%*)	87 (41.6%)	122 (58.4%)	74 (35.4%)	135 (64.6%)	200 (95.7%)	9 (4.3%)

* महत्वपूर्ण अन्तर दर्शाता है ।

परिणाम तथा विवेचना

परिणाम सारणी 1 में दिये गये हैं।

इन पाँचों आनुवंशिक लक्षणों का विश्लेषण करने पर निम्नलिखित मुख्य बातें प्राप्त होती हैं—

कान का मैल (सेरुमेन टाइप)

कान का गीली किस्म का मैल बिरहोर जनजाति में अत्यधिक पाया जाता है। इसकी बारम्बारता मर्द में 75% तथा औरत में 81.5% है। ठीक इसके विपरीत इस क्षेत्र की हिन्दू जनजाति में गीले किस्म का कान का मैल कम पाया जाता है। इसकी बारम्बारता मर्द में 36.1% तथा औसत 51.5% है। ψ^2 जाँच से पता चलता है कि बिरहोर तथा हिन्दू जाति में महत्वपूर्ण अन्तर ($P>0.001$)।

हाथ लपटाना

बिरहोर के मर्द एवं औरत दोनों में बाँये प्रकार का बांह लपटाना ज्यादा पाया गया। इनमें बाँया/दाँया प्रकार की घटना 59.2% हैं जबकि हिन्दू जाति में इस प्रकार की घटना 47.8% है। बिरहोर के मर्द एवं औरत में महत्वपूर्ण अन्तर नहीं पाया गया है जबकि हिन्दू जाति के मर्द एव औरत में महत्वपूर्ण अन्तर मिलता है ($P<0.05$)। इस लक्षण में भी इन दोनों जातियों में महत्वपूर्ण अन्तर पाया गया है। ($P<0.05$).

बाँह मोड़ना

दोनों ही जातियों में बाँये प्रकार के व्यक्ति ज्यादा पाये गये हैं लेकिन इनमें कोई महत्वपूर्ण अन्तर नहीं पाया गया है।

कान की निचली मुलायम पालि (इयर लोब)

बिरहोर मर्द में 65% तथा हिन्दू मर्द में 62.4% कान की निचली मुलायम पालि स्वतन्त्र रूप में पायी गयी। बिरहोर औरत में 59.2% तथा हिन्दू औरत में 69.1% स्वतन्त्र पालि प्राप्त होती है। फिर भी इन दोनों में कोई महत्वपूर्ण अन्तर नहीं मिलता है।

कर्णकेश

इस लक्षण में बिरहोर में हिन्दू से भिन्नता नहीं है। बिरहोर में 2.2% तथा हिन्दू में 4.3% कर्णकेश देखा गया है लेकिन दोनों की औरतों में कर्णकेश पूर्णतः अनुपस्थित है।

आदिवासी छोटा नागपुर पठार के सुदूर गाँवों में रहते हैं जो मानव आनुवंशिक अध्ययन के लिये एक बड़ी जनसंख्या है। वे कई शताब्दियों से छोटे कुल के इकाई में अलग रहते आये हैं इसलिये यह अनुमान किया जाता है कि इन अलग रहने वाले छोटे समूहों में गंगा के समतल में रहने वाली जातियों की तुलना में चुनाव (प्राकृतिक) और आनुवंशिक विचलन अत्यधिक क्रियाशील होंगे जिनमें असाधारण

और दुर्लभ लक्षण की बारम्बारता अत्यधिक है। इसी उद्देश्य से इन पाँचों आनुवंशिक लक्षणों का अध्ययन छोटा नागपुर की बिरहोर जनजाति एवं हिन्दू जाति के तुलनात्मक अध्ययन द्वारा किया गया।

भारतीय लोगों के कान के मैल पर बहुत ही कम अध्ययन हुआ है। चक्रवर्ती तथा चक्रवर्ती[७] ने बताया है कि भारतीय जनसंख्या में कान का मैल दो फेनोटिपिक रूपों—गीला (मुलायम) और सूखा (कड़ा) में पाया गया है। सूखी किस्म का मैल दानेदार या छिलका जैसा भूरे रंग का होता है तथा धातु की छड़ी में चिपकता नहीं है, जबकि गीले किस्म की मैल गाढ़े मधु जैसा दिखता है और धातु की छड़ी में चिपक जाता है। इन दोनों किस्मों को आसानी से पहचाना जा सकता है। एक मध्य किस्म का कर्णमैल—जो सिर्फ 0.5% ही पाया गया है[8] होता है, लेकिन यह भारतीय जनसंख्या में अब तक नहीं प्राप्त हुआ। प्रस्तुत प्रेक्षण यह प्रदर्शित करता है कि कर्णमैल के प्रकार में बिरहोर तथा हिन्दू जाति में महत्वपूर्ण अन्तर है। बिरहोर में सूखे कर्णमैल की बारम्बारता 22.1% है जबकि हिन्दू में 60.3% है।

सारणी 2

भारतीय जातियों में कर्णमैल के प्रकारों के तुलनात्मक आँकड़े

जाति समुदाय	संख्या	सूखा कर्णमैल का %	स्रोत
उत्तरी भारत			
हिन्दू-			
जाट (हरियाणा)	231	58.6	चक्रवर्ती तथा चक्रवर्ती[७]
खत्री (दिल्ली)	237	59.5	
पंजाबी (पंजाब)	310	59.4	
सिख (हरियाणा)	339	59.9	
मुस्लिम (दिल्ली)	307	49.8	
दक्षिण भारत			
हिन्दू-			
तेलगु ब्राह्मण (आ० प्रदेश)	256	35.6	
तमिल ब्राह्मण (तमिल)	206	39.3	
कनारा ब्राह्मण (कर्नाटक)	200	37.5	
मुस्लिम (केरल)	276	48.2	
बिरहोर (बिहार)	181	22.1	प्रस्तुत अध्ययन
हिन्दू जाति तेली (बिहार)	209	60.3	

सारणी 3

भारतीय जातियों में हाथ लपटाने और बाँह मोड़ने का तुलनात्मक अध्ययन

जाति/समुदाय	संख्या	हाथ लपटाना % दाँया/बाँया	संख्या	बाँह मोड़ना % दाँया/बाँया	स्रोत
महाराष्ट्रीय	1562	57.23	—	—	मल्होत्रा[7]
जाट	564	52.30	—	—	चटोपाध्याय[1]
बंगाली	258	59.69	258	37.60	"
बिरहोर (बिहार)	181	40.80	181	40.00	प्रस्तुत अध्ययन
हिन्दू जाति तेली (बिहार)	209	52.20	209	41.60	"

भारतीय जातियों के बीच सूखे कर्णमैल का तुलनात्मक विवरण सारणी 2 में प्रस्तुत किया गया है। इससे यह पता चलता है कि जाट (हरियाणा), खत्री (हरियाणा), पंजाबी (पंजाब) और सिख (पंजाब) में लगभग सूखा कर्णमैल का उतना ही प्रतिशत मिलता है जितना कि वर्तमान हिन्दू जाति में पाया गया है। लेकिन यह तेलगू, तमिल एवं कनारा ब्राह्मण में कम है। इन जनसंख्याओं से विपरीत बिरहोर जनजाति में सूखा कर्णमैल बहुत की कम (22.1%) पाया जाता है।

हाथ लिपटाने की प्रक्रिया में भी बिरहोर और हिन्दू जाति में महत्वपूर्ण अन्तर है। हिन्दू जाति में दाँये व्यक्तियों के लोग ज्यादा पाये गये हैं जबकि बिरहोर में बाँये व्यक्तियों की संख्या अधिक है। भारत के अन्य मानव वंशों की तुलना में भी बिरहोर में दाँये व्यक्तियों की बारम्बारता बहुत ही कम है।

भारत में अब तक अध्ययन किये गये आँकड़ों से यह पता चलता है कि बाँह मोड़ने की प्रक्रिया में कोई विशेष अन्तर नहीं है। यह अन्तर वर्तमान अध्ययन में भी नहीं पाया गया।

दोनों ही वर्गों की औरतों में कर्णकेश की अनुपस्थिति एक महत्वपूर्ण तथ्य है पर यह कहना मुश्किल हैं कि यह यौन-सम्बद्ध या यौन-सीमित लक्षण है। इस सन्दर्भ में व्यापक अध्ययन से ही कुछ पता चल सकता है। प्रस्तुत अध्ययन फेयरीमइया तथा अल्मोड़ा के अध्ययन से मिलता है क्योंकि यह एक ही जैसा है कि चयनशक्ति अलग-अलग जनसंख्या में अलग-अलग करती है। इसके अतिरिक्त ये आनुवंशिक वर्गीकरण गुणों में भी व्यवहृत किये जा सकते हैं।

निर्देश

1. चक्रवर्ती, एम० आर०, बुलेटिन बिहार ट्राइवल रिसर्च इन्स्टीट्यूट, 1965, [43-167
2. चक्रवर्ती, एम० आर० तथा चक्रवर्ती, आर०, सेरुमेन टाइप्स इन सम इण्डियन पोपुलेशन ग्रुप्स (निजी सूचना)

3. चटोपाध्याय, पी० के०, एन्थ्रोपोलोजी, 1967, **72**, 317-324

4. दास शर्मा, पी० तथा साहु, बी०, इ० ज० एन्थ्रो० सो० निप्पोन, 1973, **81**, 260-267

5. फिशर, आर० तथा येट्स, एफ०, स्टेटिसटिकल टेबुल्स फार बायोलोजिकल, एग्रीकल्चरल एण्ड मेडिकल रिसर्च, हाफनर, न्यूयार्क, 1953

6. गुप्ता, एस० पी०, दत्ता, पी० सी० तथा सरकार डी०, 'मैन इन इण्डिया' 1970, **50**, 135-140

7. मल्होत्रा, के० सी०, एक्टा जेने० बासेल 1968, **18**' 135-140

8. मतसुनागा, ई०, अन्न, हूमेन जेने० 1962, **25**, 273-281

9. शास्त्री, यू० एस० तथा मल्होत्रा, के० सी०, इस्ट० एन्थ्रो० 1971, **1**, 75-81

10. वर्मा, वी० वी०, 'मैन इन इण्डिया' 1952, **32**, 134-142

11. वुल्फ, बी०, अन्न० हुमेन जेने०, 1957, **21**, 397-409

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 31, No. 2-3, 1988

श्यान असंपीड्य द्विविमीय अक्षतः सममित प्रवाह

एच० एल० अग्रवाल तथा बी० डी० सिंह
सम्प्रयुक्त गणित विभाग, इंस्टीट्यूट आफ टेक्नालाजी
बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—मई 1, 1986]

सारांश

एक ध्रुवीय निर्देशांक प्रणाली (r,θ) में श्यान असंपीड्य द्रव पर विचार किया गया है जिसमें एक वृत्तीय लैमिना को विश्राम अवस्था से गतिशील बना दिया गया है।

Abstract

Two-dimensional axisymmetric flow of viscous incompressible fluid due to the time dependent rotation of a circular lamina. *By* H. L. Agrawal and B. D. Singh, Department hf Applied Mathematics, Institute of Technhlogy, B. H. U., Varanasi.

A viscous incompressible fluid in a polar co-ordinate system (r,θ) has been considered in which a circular lamina of radius '*a*' is initially at rest and is set in motion due to a time dependent rotation. Two cases have been considered. In first case the circular lamina is rotated on the boundary due to shearing stress and in the second case circular lamina is rotated by prescribing time depeedent angular velocity. Due to the shearing stress the velocity of fluid increases with an increase in r for $\beta_j=1.0$ and due to the angular velocity, the velocity of fluid decreases with an increase in r and β_j.

अर्वाचीन वर्षों में घूर्णी द्रवों के अध्ययन पर विशेष बल दिया जा रहा है। खभरूई[1] ने वृत्तीय प्लट के घूर्णन के फलस्वरूप अनन्त श्यान द्रव के मन्द स्थायी गति पर कार्य किया है। राइसमान[2] ने श्यान द्रव के अक्षतः सममित द्विविभीय घूर्णी प्रवाह का अध्ययन किया है।

प्रस्तुत अध्ययन का उद्देश्य एक श्यान असंपीड्य द्रव के द्विविमीय अक्षतः सममित प्रवाह पर एक वृत्तीय लैमिना के घूर्णन से होने वाले प्रभाव का अध्ययन करना है।

निर्मेय का सूत्रीकरण

हम ध्रुवीय निर्देशांक प्रणाली (r,θ) में एक श्यान असंपीड्य द्रव की कल्पना करते हैं जिसमें a त्रिज्या वाला एक वृत्तीय लैमिना प्रारम्भ में विश्राम अवस्था में रहता है और समय पर अश्रित घूर्णन के फलस्वरूप गतिशील बना दिया जाता है।

हम वृत्तीय लैमिना के केन्द्र को मूलबिन्दु मान लेते हैं। हम यह भी कल्पना करते हैं कि द्रव इस केन्द्र के चारों ओर वृत्तीय गति करता है और द्रव कण की गति त्रिज्या निर्देशाँक तथा समय का ही फलन होगी। यह गति निम्नलिखित समीकरणों द्वारा नियन्त्रित होती है

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}=\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}\right), \tag{1}$$

$$\rho\frac{v^2}{r}=\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{2}$$

$$p_{rr}=p_{\theta\theta}=-p, p_{r\theta}\equiv\tau=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right), \tag{3}$$

जहाँ v घटक है वर्द्धमान θ की दशा में बेग का, ρ द्रव का घनत्व है, μ श्यानता गुणांक है, p दाब है और $p_{s\theta}$ अपरूपण प्रतिबल है।

निर्मेय का प्रारम्भिक प्रतिबन्ध है,

$$v=0 \text{ जब } t=0 \tag{4}$$

समीकरण (1) से द्रव की गति, समीकरण (2) से दाब (जब v ज्ञात हो) तथा समीकरण (3) से नार्मल तथा अपरूक प्रतिबल (shear stresses) सूचित होते हैं।

दशा 1 : सीमा पर अपरूपक प्रतिबल के कारण वृत्तीय लैंमिना घूर्णित किया जाता है। यहाँ τ को सीमा $r=a$ पर समय के फलन के रूप में माना गया है और $a(1+\epsilon^{+\alpha t})$ द्वारा व्यक्त किया जाता है जहाँ ϵ तथा α यादृच्छिक अचर है। निर्मेय को सीमा प्रतिबन्ध इस प्रकार है

$$\tau=\mu r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)=1+\epsilon e^{+\alpha t} \quad r=a \; t>0 \text{ पर} \tag{5}$$

हल की विधि (अ)

समीकरण (1) का लाप्लास रूपान्तर लेने पर

$$\frac{d^2\bar{v}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\bar{v}}{dr}-\left(\frac{1}{r^2}+\frac{S}{\gamma}\right)\bar{v}=0, \tag{6}$$

जहाँ

$$\bar{v}=\int_0^\infty ve^{-St}dt,\ \text{Re}\ (S)>0.$$

समीकरण (6) का हल निम्नवत् लिखा जा सकता है

$$\bar{v}=A(S)I_1(r\sqrt{S/\gamma})+\beta(S)K_1(r\sqrt{S/\gamma}), \tag{7}$$

जहाँ $A(S)$ तथा $B(S)$ केवल S के फलन हैं जिसे सीमा प्रतिबन्ध तथा भौतिक विचार द्वारा ज्ञात किया जा सकता है जहाँ $\bar{v}$ सान्त है $r=0$ पर, तब

$$B(S)=0. \tag{8}$$

तब हम $\bar{v}$ को इस प्रकार प्राप्त करते हैं

$$\bar{v}=A(S)I_1(r\sqrt{S/\gamma}) \tag{9}$$

$A(S)$ प्राप्त करने के लिए हम समीकरण (5) का लाप्लास रूपान्तरण लेते हैं तो

$$\mu r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\bar{v}}{r}\right)=\frac{1}{S}+\frac{\epsilon}{S-a}\ r=a\ \text{पर} \tag{10}$$

अब (9) से उपर्युक्त समीकरण में $\bar{v}$ का मान रखने पर

$$A(S)=\left(\frac{1}{S}+\frac{\epsilon}{S-a}\right)\frac{1}{\mu[I_1'(a\sqrt{S/r})\sqrt{S/\gamma}-a^{-1}I_1(a\sqrt{S/\gamma})]} \tag{11}$$

$$\bar{v}=\frac{(1/S+\epsilon/(S-a)\times I_1(r\sqrt{S/\gamma})}{\mu[I_1'(a\sqrt{S/\gamma})\sqrt{S/\gamma}-a^{-1}I_1(a\sqrt{S/\gamma})]} \tag{12}$$

समीकरण (12) का व्युत्क्रम लाप्लास रूपान्तर लें तो वेग परिच्छेद्धिका निम्नवत् होगी

$$v=-\frac{1}{\mu 2\pi i}\int_{Q-i\infty}^{Q+i\infty}\frac{[(S-a)+\epsilon s]I_1(r\sqrt{S/\gamma})e^{St}ds}{S(S-a)[I_1'(a\sqrt{S/\gamma})\sqrt{S/\gamma}-a^{-1}I_1(a\sqrt{S/\gamma})]} \tag{13}$$

जहाँ Q समाकल्य की विचित्रताओं के असली अंश से बड़ा है।

(13) में समाकल्य S का एक समाकल फलन है और उसके पोल $S=0, S=a$ पर होते हैं और हम

$$[\sqrt{S/\gamma}I_1'(a\sqrt{S/\gamma}(-a^{-1}I_1(a\sqrt{S/\gamma})]\equiv Q(S)$$

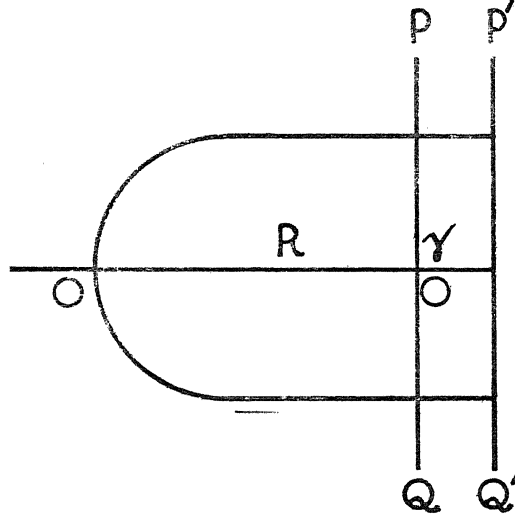
के शून्यों पर कल्पना करते हैं। उपर्युक्त व्यंजक के शून्यों को पाने के लिए हम उसमें $S=-\gamma\beta^2$ रखते हैं तो हमें

$$1/a[ia\beta I_1'(ia\beta)-I_1(ia\beta)]=i/a[a\beta J_1'(a\beta)-J_1(a\beta)]$$

प्राप्त होता है। माना कि βj मूल है समीकरण

$$a\beta J_1'(a\beta)-J_1(a\beta)=0 \tag{14}$$

का तो $-\nu\beta j^{2\prime}s$ शून्य हैं $Q(S)$ के। हम समाकल्य के समाकलन को एक कंटूर के साथ साथ जानते हैं जिसे निम्नवत् दिया जाता है।



हम काल्पनिक अक्षि से y दूरी पर एक रेखा खींचते हैं और यह रेखा काल्पनिक अक्ष के समान्तर होती हैं। खींचे जाने वाले वृत्त का केन्द्र मूल बिन्दु होता है और त्रिज्या R होती है। इसमें पर्याप्त विचित्रताएँ होती हैं। यह ऋण वास्तविक अक्षि से O पर काल्पनिक अक्षि से P,Q पर तथा नई खींची रेखा से P',Q' पर मिलता है। जब $R\rightarrow\infty$, तो अंश $Q'QOPP'$ पर समाकल शून्य होता है। अब

$$\frac{d}{d\beta}\left[i\beta I_1'(ia\beta)-a^{-1}I_1(ia\beta)\right]_{\beta=\beta_j}=ia\beta_j J_1''(a\beta_j) \tag{15}$$

अतएव पोल $S=0$ पर अवशेष $-a$ होगा।

पोल $S=\alpha$ पर अवशेष होगा

$$\frac{\epsilon I_1(r\sqrt{\alpha/\gamma})e^{\alpha t}}{\sqrt{\alpha/\gamma}I_1'(a\sqrt{\alpha/\gamma})-a^{-1}I_1(a\sqrt{\alpha/\gamma})}$$

पोल $S=-\gamma\beta_j^2, J=1,2\ldots$ पर अवशेष को निम्नवत् व्यक्त किया जाता है।

$$\frac{J_1(r\beta_j)e^{-\gamma\beta_j^2 t}[-\gamma\beta_j^2(1+\epsilon)-\alpha]}{\gamma a\beta_j^3(\gamma\beta_j^2+\alpha)J_1''(a\beta_j)}$$

अतएव वेग परिच्छेदिका का व्यंजक होगा

$$v=1/\mu\left[\frac{\epsilon I_1(r\sqrt{a/\gamma})e}{\sqrt{a/\gamma}I_1'(a\sqrt{a/\gamma})-a^{-1}I_1(a\sqrt{a/\gamma})}\right. \qquad (16)$$

$$\left.+\sum_j \frac{J_1(r\beta_j)e^{-\gamma\beta_j^2 t}[-\gamma\beta_j^2(1+\epsilon)-a]}{\gamma a\beta_j^3(\gamma\beta_j^2+a)J_1''(a\beta_j)}-a\right]$$

दशा 2 : समय आश्रित कोणीय वेग प्रदान करने पर वृत्तीय लैमिना का घूर्णन ।

यहाँ वेग v को सीमा $r-a$ पर समय के फलन रूप में मान लिया जाता है और इसे $1+\epsilon e^{+\alpha t}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है जहाँ ϵ तथा α अचर है ।

निर्मेय के सीमा प्रतिबन्ध हैं

$$v=1+\epsilon e^{+\alpha t} \text{ on } r=a, t>0. \qquad (17)$$

हल की विधि (ब)

जिस तरह हमने दशा I में किया है उसी तरह

$$\bar{v}=C(S)I_1(r\sqrt{S/\gamma}) \qquad (18)$$

जहाँ $C(S)$ फलन है S का और जिसे सीमा प्रतिबन्ध (17) से प्राप्त किया जा सकता है ।

समीकरण (17) का लाप्लास रूपान्तर लेने पर

$$\bar{v}=\frac{1}{S}+\frac{\epsilon}{S-\alpha} \qquad (19)$$

अब (18) में (19) रखने पर

$$C(S)=\frac{1/S+\frac{\alpha t_\epsilon}{S-\alpha}}{I_1(a\sqrt{S/\gamma})} \qquad (20)$$

(18) में (20) का प्रयोग करने पर

$$\bar{v}=\frac{[(S-\alpha)+S\epsilon]I_1(r\sqrt{S/\gamma})}{S(S-\alpha)I_1(a\sqrt{S/\gamma})} \qquad (21)$$

उपर्युक्त समीकरण का व्युत्क्रम लाप्लास रूपान्तर लेने पर हमें वेग परिच्छेदिका के लिए निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होता है

$$v=\frac{1}{2\pi i}\int_{Q-i\infty}^{Q+i\infty}\frac{[(S-\alpha)+S\epsilon]I_1(r\sqrt{S/\gamma})e^{st}ds}{S(S-\alpha)I_1(a\sqrt{S/\gamma})} \qquad (22)$$

जहाँ Q समाकल्य की विचित्रताओं के असली अंशों से बड़ा है ।

(22) में समाकल्य S का समाकल फलन है और इसमें $S=0, S=a$ तथा

$$I_1(a\sqrt{S/\gamma})=Q_1(S)$$

के शून्यों पर पोल होता है ।

$S=-\gamma\beta^2$ के शून्यों को पाने के लिए हम $Q_1(S)$ में लेते हैं । अत:

$$I_1(ia\beta)=iJ_1(a\beta)$$

माना कि सारे β_j' मूल हैं $J_1(a\beta)=0$, के तो $Q_1(S)$ के मूल होंगे

$$-\gamma\beta_j^2, J=1,2,\ldots$$

हम दशा 1 को भाँति समाकलन का कंटूर ग्रहण करते हैं । अब

$$\frac{d}{d\beta}\,[I_1(ia\beta)_{\beta=\beta_j}=iaJ_1'(a\beta)$$

अतएव $S=0$ पर अवशेष 1 है ।

$S=\alpha$ पर जो अवशेष होगा वह है

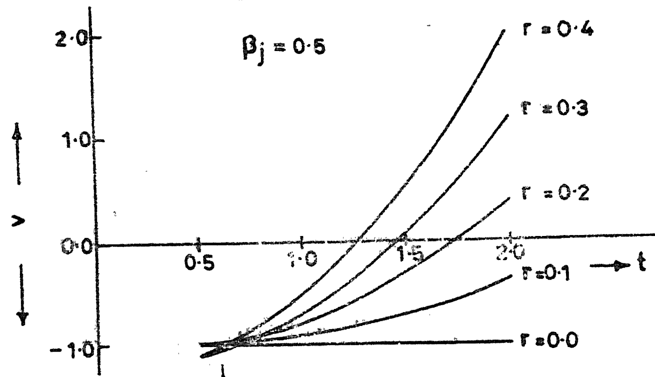
$$\frac{\epsilon I_1(r\sqrt{\alpha/\gamma})e^{\alpha t}}{I_1(a\sqrt{\alpha/\gamma})}$$

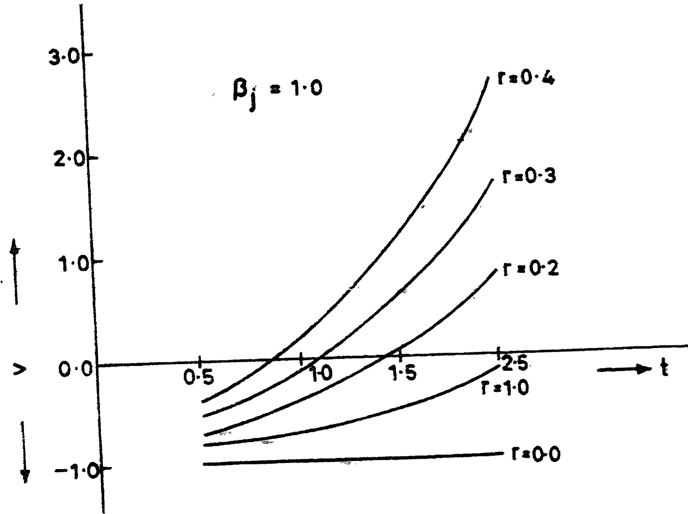
$S=-\gamma\beta_j^2$ पर जवशेष होगा

$$=\frac{[\gamma\beta_j^2(1+\epsilon)+\alpha]J_1(r\beta_j)e^{-\gamma\beta_j^2 t}}{\gamma\beta_j^2(\gamma\beta_j^2+\alpha)J_1(a\beta_j)}$$

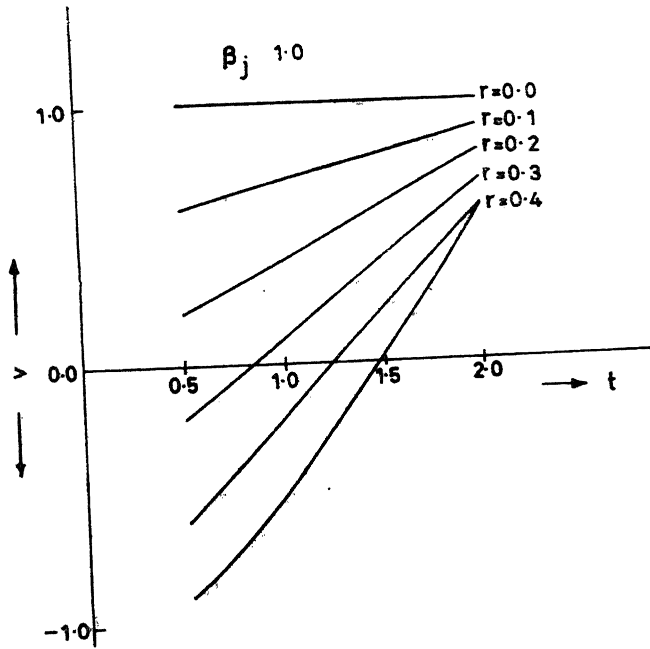
अत: वेग परिच्छेदिका के लिए व्यंजक होगा

$$v=\left[\frac{\epsilon I_1(r\sqrt{\alpha/\gamma})e^{\alpha t}}{I_1(a\sqrt{\alpha/\gamma}}-\sum_j\frac{[\gamma\beta_j^2(1+\epsilon)+\alpha]J_1(\gamma\beta_j)e^{-\gamma\beta_j^2 t}}{\gamma\beta_j^2(\gamma\beta_j^2+\alpha)J_1(a\beta_j)}+1\right]$$

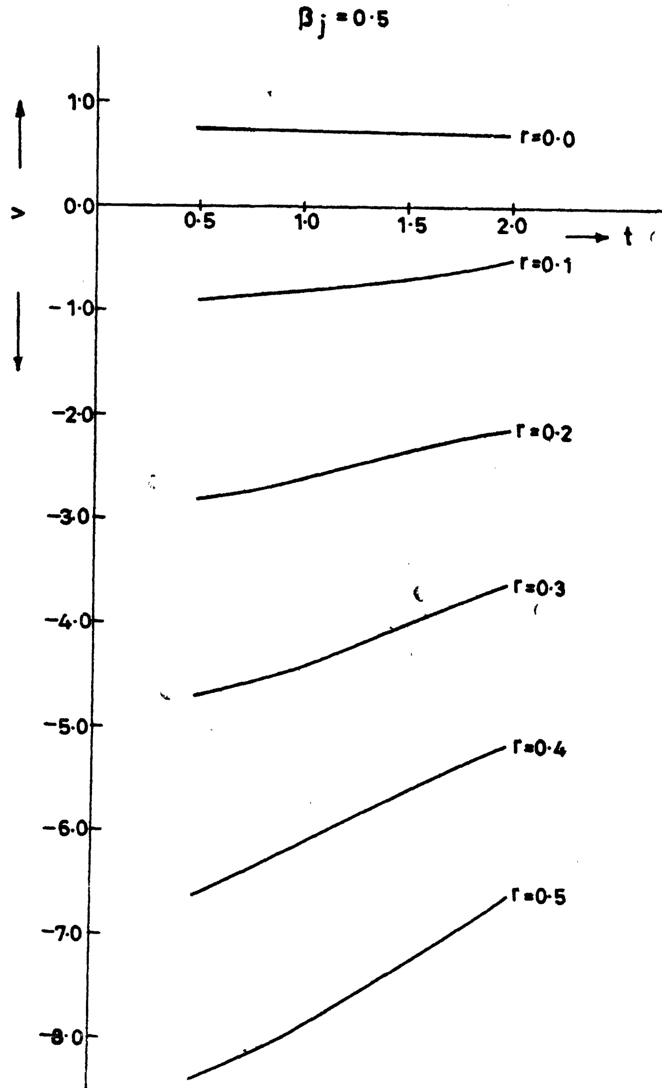




चित्र 1. वेग परिच्छेदिका



चित्र 2. वेग परिच्छेदिका



चित्र 3. वेग परिच्छेदिका

निष्कर्ष

चित्र 1 तथा 2 γ तथा प्राचल β_j के विभिन्न मानों पर द्रव के वेग के आचरण को प्रदर्शित करते हैं जब वृत्तीय लैमिना को सीमा पर अपरूपण प्रतिबल के कारण घूर्णित किया जाता है। वेग $\beta_j=10$ बढ़ता जाता है ज्यों ज्यों r में वृद्धि होती है। यह वेग $\beta_j=0.5$ की अपेक्षा अधिक है। यदि वृत्तीय लैमिना का घूर्णन संस्तुत कोणीय वेग के कारण होता है तो वेग परिच्छेदकाओं की प्रकृति चित्र 3 तथा 4 के अनुरूप बदलती है। यह वेग r तथा β_j में वृद्धि के साथ घटती जाती है।

निर्देश

1. खसरूइ, एस० आर०, Bull, Calcutta, Math. Soc. 1957, **47**, 61-65.
2. हर्बर्ट रीसमान, ZAMM, 1975, **55**, 443-445.
3. वाट्सन, जी० एन, Theory of Bessel functions, Cambridge Univ. Press, 1958.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 31, No. 2-3, 1988

दो चरों वाले सार्वीकृत H-फलन के लिए कुछ प्रसार

एस० एस० भाटी

गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर (राज०)

[प्राप्त—जनवरी 29, 1988]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में हम लीगेण्ड्र तथा जैकोबी बहुपदों के लाम्बिकता गुण का उपयोग दो चरों वाले सार्वीकृत H-फलन के लिए कुछ प्रसार सूत्र प्राप्त करने के लिए करेंगे ।

Abstract

Certain expansions for generalised H-function of two variables. *By* S. S. Bhati, Department of Mathematics, University of Jodhpur, Jodhpur.

In the present paper we make use of the orthogonal properties of Legendre and Jacobi polynomials to derive two expansion formulae for the generalized H-function of two variables.

1. विषय प्रवेश

दो चरों वाले सार्वीकृत फलन का विस्तार, जिसे पहले अग्रवाल[1] ने प्रस्तुत किया था वह अब मुनोत तथा कल्ला द्वारा[6] निम्नलिखित रूप में द्विगुण मेलिन-बार्नीज कंटूर समाकल की सहायता से दिया गया है

$$H\left[\begin{array}{c|c|c} \begin{pmatrix} o,n_1 \\ p,q \end{pmatrix} & \begin{matrix}(a_p;\alpha_p,A_p)\\(b_q;\beta_q,B_q)\end{matrix} & x \\ \begin{pmatrix} m_2,n_2\\ r,s\end{pmatrix} & \begin{matrix}(c_r;C_r)\\(d_s;D_s)\end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} m_3,n_3\\ k,1\end{pmatrix} & \begin{matrix}(e_k;E_k)\\(f_1;F_1)\end{matrix} & y\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1}\int_{L_2}\phi(\xi,\eta)\theta_1(\xi)\theta_2(\eta)x^{\xi}y^{\eta}d\xi d\eta \tag{1.1}$$

जहाँ $(a_p;\alpha_p,A_p)$ आये हैं $(a_1;\alpha_1,A_1)$, $(a_2,\alpha_2,A_2)\ldots(a_p;\alpha_p,A_p)$ के लिए तथा

$$\phi(\xi,\eta)=\frac{\prod_{j=1}^{n_1}\Gamma(1-a_j+\alpha_j\xi+A_j\eta)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j\xi+\beta_j\eta)\prod_{j=n_1+1}^{p}\Gamma(a_j-\alpha_j\xi-A_j\eta)}$$

$$\theta_1(\xi)=\frac{\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(d_j-D_j\xi)\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(1-c_j+C_j\xi)}{\prod_{j=m_2+1}^{s}\Gamma(1-d_j+D_j\xi)\prod_{j=n_2+1}^{r}\Gamma(c_j-C_j\xi)},$$

$$\theta_2(\eta)=\frac{\prod_{j=1}^{m_3}\Gamma(f_j-F_j\eta)\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma(1-e_j+E_j\eta)}{\prod_{j=m_3+1}^{l}\Gamma(1-f_j+F\eta)\prod_{j=n_3+1}^{k}\Gamma(e_j-E_j\eta)},$$

x,y शून्य के तुल्य नहीं है तथा रिक्त गुणनफल को इकाई माना गया है। साथ ही

$p,q,r,k,s,l;n_1,n_2,n_3,m_2$ तथा m_3 ऐसी अनृण संख्याएँ हैं जिससे कि

$$p\geqslant n_1\geqslant 0, r\geqslant n_2\geqslant 0, k\geqslant n_3\geqslant 0; q\geqslant 0, s\geqslant m_2\geqslant 0; l\geqslant m_3\geqslant 0$$

तथा समस्त अचर

$$\alpha_p,\beta_q,C_r,D_s,A_p,B_q,E_k,F_1$$

धनात्मक मात्रा के सूचक हैं।

कंटूर L_1 ξ-तल में है और अपने लूपों सहित $-i\infty$ से $+i\infty$ तक विस्तीर्ण है जिससे आवश्यकता पड़ने पर आश्वस्त हुआ जा सके कि

$$\Gamma(d_j-D_j\xi), j=1,2,\ldots,m_2,$$

के पोल दाहिनी ओर तथा

$$\Gamma(1-c_j+C_j\xi), j=1,2\ldots,n_2; \Gamma(1-a_j+\alpha_j\xi+A_j\eta), j=1,2,\ldots,n_1,$$

के पोलों से कंटूर के बाईं ओर पड़ें।

पुनः कंटूर L_2 η-तल में है जो अपने लूपों सहित $-i\infty$ से $+i\infty$ तक विस्तीर्ण है जिससे आवश्यकता पड़ने पर आश्वस्त हुआ जा सके कि

$$\Gamma(f_j-F_j\eta), j=1,2,\ldots,m_3$$

के पोल दाहिनी ओर तथा

$$\Gamma(1-e_j+E_j\eta), j=1,2,\ldots,n_3; \Gamma(1-a_j+\alpha_j\xi+A_j\eta), j=1,2,\ldots,n_1$$

के पोल कंटूर के बाईं ओर पड़ेंगे।

(1.1) के द्वारा परिभाषित फलन x तथा y का वैश्लेषिक फलन है यदि

(i) $$\sum_{j=1}^{p}(\alpha_j)+\sum_{j=1}^{r}(C_j)<\sum_{j=1}^{q}(\beta_j)+\sum_{j=1}^{s}(D_j),$$

(ii) $$\sum_{j=1}^{p}(A_j)+\sum_{j=1}^{k}(E_j)<\sum_{j=1}^{q}(B_j)+\sum_{j=1}^{l}(F_j),$$

(iii) $$U=\sum_{j=1}^{n_1}(\alpha_j)-\sum_{j=n_1+1}^{p}(\alpha_j)-\sum_{j=1}^{q}(\beta_j)+\sum_{j=1}^{m_2}(D_j)$$

$$-\sum_{j=m_2+1}^{s}(d_j)+\sum_{j=1}^{n_2}(C_j)-\sum_{j=n_2+1}^{r}(C_j)>0,$$

(iv) $$|\arg x|<(1/2)U\pi$$

(v) $$V=\sum_{j=1}^{n_1}(A_j)-\sum_{j=n_1+1}^{p}(A_j)-\sum_{j=1}^{q}(B_j)+\sum_{j=1}^{m_3}(F_j)$$

$$-\sum_{j=m_3+1}^{l}(F_j)+\sum_{j=1}^{n_3}(E_j)-\sum_{j=n_3+1}^{k}(E_j)>0$$

तथा

(vi) $$|\arg y|<(1/2)V\pi.$$

x तथा y के लघु मानों के लिए $H\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right]$ का आचरण

$$H\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right]=0(|x|^{\alpha},|y|^{\beta})$$

द्वारा दिया जाता है जहाँ

$$\alpha=\text{min. Re}\left(\frac{d_j}{D_j}\right), j=1,2,\ldots,m_2;$$

$$\beta=\text{min Re}\left(\frac{f_j}{F_j}\right), j=1,2,\ldots,m_3.$$

इसी प्रकार जब x तथा y ∞ की ओर अग्रसर हों तो सम्बद्ध फलन

$$H_1\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right],$$

जो संगत है

$$H\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right]$$

की दशा $n_1=0$ के उसका आचरण होगा

$$H_1\left[\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right]=0(|x|^{p},|y|^{q})$$

जहाँ

$$p=\text{max. Re}\left(\frac{cj-1}{C_j}\right), j=1,2,\ldots,n_2,$$

$$q=\text{max. Re}\left(\frac{ej-1}{E_j}\right), j=1,2,\ldots,n_3.$$

प्रस्तुत प्रपत्र में हम लीगेण्ड्र तथा जैकोबी बहुपदों के लाम्बिकता गुण का उपयोग दो चरों वाले सार्वीकृत H-फलन के लिए प्रसार सूत्र प्राप्त करने के लिए करेंगे।

हमें जिन प्रसारों को सिद्ध करना है वे निम्नवत् हैं।

$$(1-x^2)^{\lambda-1}H[u(1-x^2)^{\delta},v(1-x^2)^{\sigma}]=\pi 2^{\mu-1}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(i-\mu)!}{(i+\mu)!}\frac{(2i+1}{\Gamma\left(\frac{2-\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu-i}{2}\right)}$$

$$H\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}0,n_1+2\\p+2,q+2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_2,n_2\\r,s\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_3,n_3\\k,l\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(1-\lambda-\mu/2;\delta,\sigma),(1-\lambda+\mu/2;\delta,\sigma),(a_p;\alpha_p,A_p)\\(b_q;\beta_q,B_q),(-\lambda-i/2;\delta,\sigma),(1-\lambda+i/2;\delta,\sigma)\\(c_r);(C_s)\\(d_s);(D_s)\\(e_k);(E_k)\\(f_l);(F_l)\end{matrix}\right|\begin{matrix}u\\ \\v\end{matrix}\right]p_i^{\mu}(x) \qquad (1.2)$$

जहाँ $$2\ \mathrm{Re}\left(\lambda+\delta\frac{d_i}{D_i}+\sigma\frac{f_i}{F_j}\right)>|\mathrm{Re}\ \mu|, i=1,2,\ldots,m_2; j=1,2,\ldots,m_3.$$

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^{\sigma-\beta} H[u(1+x)^\delta, v(1+x)^\rho]=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{i!(1+\alpha+\beta+2i)\Gamma(1+\alpha+\beta+i)}{\Gamma(1+\beta+i)}$$

$$H\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}0,n_1+2\\ p+2,q+2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_2,n_2\\ r,s\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_3,n_3\\ k,l\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(-\sigma;\delta,\rho),(\beta-\sigma;\delta,\rho),(a_p;\alpha_p,A_p)\\ (b_q;\beta_q,B_q)(\beta-\sigma+i;\delta,\rho)(-1-\alpha-i-\sigma,\delta,\rho)\\ (c_r;C_r)\\ (d_s;D_s)\\ (e_k;E_k)\\ (f_l;F_l)\end{matrix}\right|\begin{matrix}2^\delta u\\ \\ 2^\rho v\end{matrix}\right] p_i^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{1.3}$$

जहाँ $p_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ चिरसम्मत जैकोबी बहुपद है जिसे

$$p_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\binom{\alpha+n}{n}{}_2F_1\left[\begin{matrix}-n,\alpha+\beta+n+1;\\ \alpha+1;\end{matrix}\ \frac{1-x}{2}\right]$$

तथा

$$\mathrm{Re}\ (\alpha)>-1,\ \mathrm{Re}\ (\beta)>-1,\ \mathrm{Re}\left(\sigma+\delta\frac{d_i}{D_i}+\rho\frac{f_i}{F_j}\right)>-1,$$

$$i=1,2,\ldots,m_2; j=1,2,\ldots,m_3.$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है [5,p. 268] । (1.2) तथा (1.3) की वैधता के प्रतिबन्धों के अन्य सेट अनुभाग 1 के अनुसार हैं ।

2. (1.2) को सिद्ध करने के लिए हम समाकल

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-1}\ p_v^{\mu}(x) H\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}0,n_1\\ p,q\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_2,n_2\\ r,s\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_3,n_3\\ k,l\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(a_p;\alpha_p,A_p)\\ (b_q;\beta_q,B_q)\\ (c_r);(C_r)\\ (d_s);(D_s)\\ (e_k);(E_k)\\ (f_l):(F_l)\end{matrix}\right|\begin{matrix}u(1-x^2)^\delta\\ \\ v(1-x^2)^\sigma\end{matrix}\right]dx$$

$$=\frac{2^\mu\pi}{\Gamma(1-\mu/2+v/2)\Gamma(1/2-\mu/2-v/2)}$$

$$-H\left[\begin{array}{l|c|l}\begin{pmatrix}0,n_1+2\\p+2,q+2\end{pmatrix} & \begin{array}{c}(1-\lambda-\mu/2;\delta,\sigma),(1-\lambda+\mu/2;\delta,\sigma),(a_p;\alpha_p,A_p)\\(b_q;\beta_q,B_q),(-\lambda-v/2;\delta,\sigma),(1-\lambda+v/2;\delta,\sigma)\end{array} & u\\ \begin{pmatrix}m_2,n_2\\r,s\end{pmatrix} & \begin{array}{c}(c_r);(C_r)\\(d_s);(D_s)\end{array} & \\ \begin{pmatrix}m_3,n_3\\k,l\end{pmatrix} & \begin{array}{c}(e_k);(E_k)\\(f_l);(F_l)\end{array} & v\end{array}\right] \quad (2.1)$$

को स्थापित करेंगे।

(2.1) के वाम पक्ष को I से सूचित करने पर हम देखते हैं कि

$$I=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2}\phi(\xi,\eta)\theta_1(\xi)\theta_2(\eta)u^{\xi}v^{\eta}$$

$$\cdot\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda+\delta\xi+\sigma\eta-1}p_v^{\mu}(x)dx\,d\xi\,d\eta.$$

आन्तरिक समाकल का मान सूत्र [5. p. 316]

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-1}p_v^{\mu}(x)dx=\frac{2^{\mu}\pi\Gamma(\lambda+\mu/2)\Gamma(\lambda-\mu/2)}{\Gamma(1+\lambda+v/2)\Gamma(\lambda v-/2)\Gamma(1-\mu/2+v/2)\Gamma(1/2-\mu/2-v/2)}$$

जहाँ 2 Re $(\lambda)>|\text{Re }\mu|$

द्वारा निकालने पर

$$I=\frac{2^{\mu}\pi}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2}\frac{\phi(\xi,\eta)\theta_1(\xi)\theta_2(\eta)\Gamma(\lambda+\mu/2+\delta\xi+\sigma\eta)}{\Gamma(1-\mu/2+v/2)\Gamma(1/2-\mu/2-v/2)\Gamma(\lambda+v/2+1+\delta\xi+\sigma\eta)}$$

$$\times\frac{\Gamma(\lambda-\mu/2+\delta\xi+\sigma\eta)}{\Gamma(\lambda-v/2+\delta\xi+\sigma\eta)}d\xi d\eta$$

जो (1.1) की दृष्टि से हमें (2.1) तक पहुँचाता है।

अब माना कि

$$f(x)\equiv(1-x^2)^{\lambda-1}H\left[\begin{array}{l|l|l}\begin{pmatrix}0,n_1\\p,q\end{pmatrix} & \begin{array}{l}(a_p;\alpha_p,A_p)\\(b_q;\beta_q,B)\end{array} & u(1-x^2)^{\delta}\\ \begin{pmatrix}m_2,n_2\\r,s\end{pmatrix} & \begin{array}{l}(c_r);(C_r)\\(d_s);(D_s)\end{array} & \\ \begin{pmatrix}m_3,n_3\\k,l\end{pmatrix} & \begin{array}{l}(e_k);(E_k)\\(f_l);F_l)\end{array} & v(1-x^2)^{\sigma}\end{array}\right]$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}C_i\,p_i^{\mu}(x),-1<x<1 \quad (2.2)$$

समीकरण (2.2) वैध है क्योंकि $f(x)$ संतत है और विवृत अन्तराल (-1.1) में परिबद्ध चर वाला है।

(2.2) के दोनों पक्षों में से गुणा करने और x के प्रति—1 से 1 तक समाकलित करने पर हमें निम्नलिखित फल प्राप्त होता है

$$\int_{-1}^{1}(1-x^3)^{\lambda-1}\ \overset{\mu}{p_v}(x)H\left[\begin{matrix}\binom{0,n_1}{p,q}\\ \\ \binom{m_2n_2}{r,s}\\ \\ \binom{m_3,n_3}{k,l}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(a_p;\alpha_p,A_p)\\(b_q,\beta_q,B_q)\\(c_r);(C_r)\\(d_s);(D_s)\\(e_k);(E_k)\\(f_l);(F_l)\end{matrix}\right|\begin{matrix}u(1-x^2)^\delta\\ \\ v(1-x^2)^\sigma\end{matrix}\right]dx$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} C_i\int_{-1}^{1}\overset{\mu}{p_i}(x)\,\overset{\mu}{p_v}(x)dx$$

(2.1) तथा लीगेण्ड्र फलन के लाम्बिकता गुण

$$\int_{-1}^{1}\overset{m}{p_n}(x)\,\overset{m}{p_n}(x)dx\begin{cases}=0 & \text{यदि } r\neq n\\[2mm] =\dfrac{2}{2n+1}\cdot\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}; & r=n\end{cases}$$

का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है

$$C_v=2^{\mu-1}\pi\,\frac{(v-\mu)!(2v+1)}{(v+\mu)!\,\Gamma\left(\dfrac{2-\mu+v}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1-\mu-v}{2}\right)}$$

$$H\left[\begin{matrix}\binom{0,n_1+2}{p+2,q+2}\\ \\ \binom{m_2,n_2}{r,s}\\ \\ \binom{m_3n_3}{k,l}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(1-\lambda-\mu/2:\delta,\sigma),(1-\lambda+\mu/2;\delta,\sigma),(a_p;\alpha_p,A_p)\\(b_q;\beta_q,B_q),(-\lambda-v/2;\delta,\sigma),(1-\lambda+v/2;\delta,\sigma)\\(c_r);(C_r)\\(d_s);(D_s)\\(e_k);(E_k)\\(f_l);(F_l)\end{matrix}\right|\begin{matrix}u\\ \\ v\end{matrix}\right]$$

जिसे (2.2) में प्रतिस्थापित करने पर हमें वांछित प्रसार (1.2) प्राप्त होता है।

इसी प्रकार (1.3) की भी उपपत्ति है जिसमें हम समाकल

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\sigma}\ p_n^{(\alpha,\beta)}(x)H\left[\begin{matrix}\binom{0,n_1}{p,q}\\ \\ \binom{m_2,n_2}{r,s}\\ \\ \binom{m_3,n_3}{k,l}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(a_p;\alpha_p,A_p)\\(b_q;\beta_q,B_q)\\(c_r);(C_r)\\(d_s);(D_s)\\(e_k);(E_k)\\(f_l);(F_l)\end{matrix}\right|\begin{matrix}u(1+x)^\delta\\ \\ v(1+x)^\rho\end{matrix}\right]dx$$

$$=2^{\alpha+\sigma+1}\Gamma(a+n+1)$$

$$H\left[\begin{array}{l|c|c} 0,n_1+2 & (-\sigma;\delta,\rho),(\beta-\sigma;\delta,\rho),a_p;\alpha_p,A_p) & \\ p+2,q+2 & (b_q;\beta_p,B_q),(\beta-\alpha+n;\delta,\rho),(-1-\alpha-\sigma-n;\delta.\rho) & 2^{\delta}u \\ m_2,n_2 & (c_r);(C_r) & \\ r,s & (d_s);(D_s) & \\ & & 2^{\rho}v \\ m_3,n_3 & (e_k);(E_k) & \\ k,l & (f_l);(F_l) & \end{array}\right]$$

का प्रयोग करते हैं जो ज्ञात समाकल [5. *p*. 284]

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\sigma}p_n^{(\alpha,\beta)}(x)dx=\frac{2^{\alpha+\sigma+1}\Gamma(\sigma+1)\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\sigma-\beta+1)}{\Gamma(\sigma-\beta+n+1)\Gamma(\alpha+\sigma+n+2)}$$

का त्वरित परिणाम है जहाँ

$$\text{Re}\,(\alpha)>-1,\ \text{Re}\,(\sigma)>-1.$$

3. विशिष्ट दशाएँ

(i) यदि (1.2) में हम

$$\alpha_p=A_p=1;\beta_b=B_q=1;C_r=D_s=1;E_k=F_1=1;=\delta$$

लें तथा b_q,c_r,e_k के स्थान पर क्रमण: $1-b_q,1-c_r$ तथा $1-e_k$ रखें तो उसमें निहित दो चरों वाला H—फलन दो चरों वाले G फलन[1] में समानीत हो जाता है और हमें प्रसार

$$(1-x^2)^{\lambda-1}\,G_{p,[r,k],q,[s,l]}^{n_1,n_2,n_3,m_2,m_3}\left[\begin{array}{l|c} u(1-x^2)^{\sigma} & (a_p) \\ & (c_r);(e_k) \\ v(1-x^2)^{\sigma} & (b_q) \\ & (d_s);(f_l) \end{array}\right]$$

$$=2^{\mu-1}\pi\delta^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i-\mu)!(2i+1)}{(i+\mu)!\Gamma\left(\frac{2-\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu-i}{2}\right)}$$

$$.\,G_{p+2\delta,[r,k],q+2\delta,[s,l]}^{n_1,+2\delta,n_2,n_3,m_2,m_3}\left[\begin{array}{l|c} u & \nabla(\delta,\lambda+\mu/2),\nabla(\delta,\lambda-\mu/2),(a_p) \\ & (c_r);(e_k) \\ v & \Delta(\delta,1+\lambda+i/2),\Delta(\delta,\lambda-i/2),(b_q) \\ & (d_s);(f_l) \end{array}\right]p_l^{\mu}(x) \tag{3.1}$$

प्राप्त होता है जहाँ $\Delta(n,a)$ आया है निम्नलिखित प्राचल सेट के लिए

$$\frac{a}{n},\frac{a+1}{n},\ldots,\frac{a+n-1}{n},$$

$$\nabla(n,a) \text{ for } \left(1-\frac{a}{n}\right), \left(1-\frac{a+1}{n}\right), \ldots, \left(\frac{a+n-1}{n}\right).$$

समाकल (3.1) निम्नलिखित प्रतिबन्धों के वैकल्पिक प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है

$$2(n_1+n_2+m_2)>p+q+r+s$$

$$2(n_1+n_2+m_3)>p+q+k+1$$

$$|\arg u|<(n_1+n_2+m_2-p/2-q/2-r/2-s/2)\pi$$

$$|\arg v|<(n_1+n_3+m_3-p/2-q/2-k/2-l/2)\pi$$

$$2 \text{ Re } (\lambda+\delta d_i+\delta f_j)>|\text{Re } \mu|, i=1,2,\ldots,m_2; j=1,2,\ldots,m_3.$$

यदि $p+r=q+s$ तथा $p+k=q+i$, हो तो निम्नलिखित भी होना चाहिए

$$|u|<1, |v|<1,$$

$$2 \text{ Re } (\lambda+\delta d_i+\delta f_j)>|\text{Re } \mu|, i=1,2,\ldots,m_2; j=1,2,\ldots,m_3.$$

यह सूत्र और अधिक सरल होकर

$$(1-x^2)^{\lambda-1} G_{r,s}^{m_2,n_2}\left(u(1-x^2)^{\delta}\Big|\begin{matrix}(c_r)\\(d_s)\end{matrix}\right) G_{k,l}^{m_3,n_3}\left(v(1-x^2)^{\delta}\Big|\begin{matrix}(e_k)\\(f_l)\end{matrix}\right)$$

$$=2^{\mu-1}\pi\delta^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(i-\mu)!}{(i+\mu)!}\;\frac{(2i+1)}{\Gamma\left(\frac{2-\mu+i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu-i}{2}\right)}$$

$$.\,G_{2\delta,[r,k],2\delta,[s,l]}^{2\delta,n_2,n_3,m_2,m_3}\left[\begin{matrix}u\\ \\ v\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\nabla(\delta,\lambda+\mu/2),\Delta(\delta,\lambda-\mu/2)\\(1-(c_r));(1-(e_k))\\ \\ \Delta(\delta,1+\lambda+i/2),\Delta(\delta,\lambda-i/2)\\(d_s);(f_l)\end{matrix}\right] p_i^{\mu}(x) \qquad (3.2)$$

प्रदान करेगा जहाँ c_r तथा e_k को क्रमशः $1-C_r$ तथा $1-e_k$ में प्रतिस्थापित करते हैं और p तथा q दोनों ही शून्य के तुल्य हैं।

समीकरण (3.2) वैध है जब

$$2\,(n_2+m_2)>r+s;\ |\arg u|<(n_2+m_2-r/2-s/2)\pi,$$

$$2(n_3+m_3)>k+1;\ |\arg v|<(n_3+m_3-k/2-l/2)\pi,$$

$$2 \text{ Re } (\lambda+\delta d_i+\delta f_j)>|\text{Re } \mu|, i-1,2,\ldots,m_2; j=1,2,\ldots,m_3$$

या जब

$$r>s \text{ अथवा } r=s \text{ with } |u|<1), k>1 \text{ के साथ}$$

(अथवा$k=1 v|<1$), के साथ ।

$$2 \text{ Re } (\lambda+\delta d_i f_j)>|\text{Re } \mu|, i=1,2,\ldots,m_2; j=1,2,\ldots,m_3.$$

जब $l=1, k=0$ तथा $v\to 0$ हो तो (3.2) की विशिष्ट दशा बाजपेयी द्वारा प्राप्त निम्नलिखित फल के संगत है[2]

$$(1-x^2)^{\lambda-1} G_{p,q}^{m,n}\left[z(1-x^2)^{\delta} \middle| \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix} \right] = 2^{\mu-1}\pi\delta^{-1}$$

$$\cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r-\mu)!(2r+1)}{(r+\mu)!\Gamma\left(\frac{2-\mu+r}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\mu-r}{2}\right)}$$

$$\cdot G_{p+2\delta,q+2\delta}^{m,n+2\delta}\left[z \middle| \begin{matrix} \Delta(\delta,1-\lambda-\mu/2),\Delta(\delta,1-\lambda+\mu/2),a_p \\ b_q, \Delta(\delta,-\lambda-r/2),\Delta(\delta,1-\lambda+r/2) \end{matrix} \right] P_r^{\mu}(x)$$

जहाँ

$$2(m+n)>p+q, |\arg z|<(m+n-p/2-q/2)\pi,$$

$$2 \text{ Re } (\lambda+\delta b_j)>|\text{Re } \mu|, j=1,2,\ldots,m, \lambda\geqslant 1.$$

इसी तरह (1.3) के विशिष्टीकरण से जैकोबी बहुपद वाले कुछ प्रसार सूत्र मिल सकते हैं ।

निर्देश

1. अग्रवाल, आर० पी०, 'प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस इंडिया,' 1965, 31, 536-46.
2. बाजपेयी, एस० डी०, 'वही, 1969, 35, 90-94.
3. ब्रामविच, टी० जे० आई०, Theory of Infinite Series', 1959.
4. एर्डेल्यी, ए० 'Higher Transedental Functions', भाग I, 1953.
5. वही 'Tables of Integral Transforms', भाग II, 1954.
6. मुनोत, पी० सी० तथा कल्ला, एस० एल०, Univ. Nac: Tucumau, Rev. 1971, 1267-87
7. व्हिटेकर, ई० टी० तथा वाट्सन, जी० एन०, 'A Course of Modern Analysis', केम्ब्रिज 1952, पृष्ठ 324.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 31, No. 2-3, 1988

विद्युत-प्रकाशीय दूरीमापक यंत्रों के योज्य स्थिरांक का निर्धारण

सुरेन्द्र प्रसाद राय
ज्योडीय एवं अनुसंधान शाखा, भारतीय सर्वेक्षण विभाग, देहरादून

[प्राप्त—मार्च 24, 1987]

सारांश

शीघ्रता एवं परिशुद्धता से दूरी मापने का कार्य आजकल विद्युतचुम्बकीय दूरीमापक यंत्रों से हो रहा है। इन यंत्रों से दूरी मापने के लिए विद्युत-चुम्बकीय तरंगों का उपयोग किया जाता है जो सूक्ष्म तरंग, अवरक्त किरणें या प्रकाश किरणें होती हैं। अवरक्त तथा प्रकाश-किरणों का उपयोग करने वाले यंत्रों को विद्युत-प्रकाशीय दूरी-मापक यंत्र कहा जाता है जबकि सूक्ष्म तरंगों का उपयोग करने वाले यंत्र सूक्ष्मतरंगीय दूरीमापक यंत्र कहलाते हैं। अब यदि ऐसे किसी भी यंत्र से कोई ज्ञात दूरी मापी जाय तो कुछ त्रुटि मिलती है, जिसे शून्य त्रुटि (zero-error) या योज्य स्थिरांक (additive constant) कहा जाता है। इस शोधपत्र में इस स्थिरांक या त्रुटि के निर्धारण के लिए दो विधियों का विवरण दिया गया है। एक विधि के लिए ऐसी ज्ञात दूरी का होना आवश्यक है जो यंत्र की यथार्थता से भी अधिक यथार्थता से मापी गयी हो, अर्थात् किसी और परिशुद्ध यंत्र या विधि द्वारा मापी गई दूरी हो। दूसरी विधि में ऐसी अत्यंत यथार्थता से ज्ञात दूरी की आवश्यकता नहीं पड़ती बल्कि किसी भी एक दूरी में कुछ भाग करके तथा सभी को माप कर ही स्थिरांक का निर्धारण किया जा सकता है। इस संबंध में अवरक्त दूरी मापक यंत्र के साथ व्यावहारिक तौर पर किये हुए कार्यों के आधार पर यह निष्कर्ष इस शोध पत्र में निकाला गया है कि योज्य स्थिरांक के परिशुद्धता से निर्धारण के लिए या तो ज्ञात दूरी का होना आवश्यक है या किसी अज्ञात दूरी का। दूरी ज्ञात होने पर प्रेक्षण कम भी लिए जा सकते हैं किंतु अज्ञात दूरी के विभिन्न भागों की लम्बाई अपेक्षाकृत काफी अधिक बार मापना आवश्यक होगा।

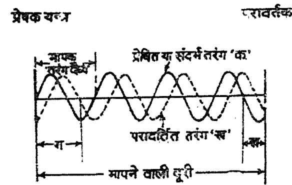
Abstract

Determination of additive constant for electro-optical ·distance measuring instruments. *By* S. P. Rai, Geodic and Research Branch, Indian Survey Department, Dehradun.

The values of additive constant for infrared distance measuring instment have been measured two methods and the result has been analysed.

भू-सतह के दो स्थान-बिन्दुओं को मानचित्र पर दर्शाने के लिए उनके बीच की दूरी ज्ञात होना बहुत आवश्यक है। यह कार्य सदियों से विभिन्न युक्तियों तथा यंत्रों से होता आ रहा है जिनमें फीते, जरीबें, तार, परासमापी (रेंजफाइन्डर) तथा टैकियोमीटर आदि प्रमुख हैं। किन्तु इनकी यथार्थता अधिक नहीं होती तथा दूरी मापने में समय भी अधिक लगता है। पिछले कुछ वर्षों से विद्युत-चुम्बकीय दूरी-मापक यंत्रों से यह कार्य शीघ्रता तथा अच्छी यथार्थता से किया जाने लगा है।

हमेशा सूक्ष्म तरंगीय दूरीमापक यंत्र एकसाथ दो उपयोग में लाये जाते हैं, अर्थात् किसी दूरी के दोनों किनारों पर एक-एक यंत्र लगाया जाता है। विद्युत-प्रकाशीय दूरी मापक यंत्र सर्वदा परावर्तक (रिफ्लेक्टर) के साथ काम में लाया जाता है, अर्थात् एक स्थान-बिन्दु पर एक यंत्र तथा दूसरे स्थान-बिन्दु पर परावर्तक। मापक आवृत्तियों (measuring frequences) से अधिमिश्रित (modulated) विद्युत-चुम्बकीय तरंग यंत्र से निकलती है तथा दूसरे सिरे पर लगे यंत्र या परावर्त-क से पुनः प्रेषित या परावर्तित होकर पहले यंत्र द्वारा प्राप्त की जाती है। प्राप्त तथा संदर्भ (reference) तरंगों के बीच कलान्तर (Phase difference) की माप द्वारा दूरी मालूम हो जाती है। चित्र 1 में "क" प्रेषित



चित्र 1 दूरीमापन का सिद्धान्त

तरंग, "ख" परावर्तित तरंग, "ग" कुल कलान्तर तथा "घ" आवश्यक कलान्तर है। "घ" "ग" का आधा होता है क्योंकि तरंग को संबंधित दूरी में जाकर तथा लौटकर दो बार गमन करना पड़ता है। चूंकि तरंग का वेग तथा तरंगदैर्ध्य मालूम होता है अतः कलान्तर "घ" की माप से दूरी की गणना यंत्र द्वारा कर ली जाती है।

अधिकांश अवरक्त दूरीमापक यंत्रों से सामान्यता दो-तीन कि० मी० दूरी मापना संभव होता है। दूरी-मापन की यथार्थता सामान्यतः $\pm$ (5 मि० मि० $+$ 5 ppm) होती है। विद्युत-चुम्बकीय तरंगों के वेग पर मौसम का भी प्रभाव पड़ता है क्योंकि ताप, वायु दाब आदि में परि-वर्तन से वायु का आवर्तनांक बदलता रहता है। वर्षा, हिम, कुहरा, धुंध तथा वायु का सिमसिमाना तो और भी कुप्रभाव डालते हैं। अतः अवरक्त यंत्र के परास एवं यथार्थता मौसम से प्रभावित हो जाते हैं। यही कारण है कि ऐसे यंत्र से दूरी मापते समय ताप, वायु-दाब तथा जल-वष्प-दाब हेतु शुद्धियाँ करनी पड़ती हैं। ये शुद्धियाँ कितनी महत्वपूर्ण होती हैं इसका अनुमान इसी से लगाया जा सकता है कि अगर ताप मापने में एक डिग्री से०, वायु-दाब में 2.5 मि० मी० तथा जल-वाष्प-दाब में 19 मि० मी० की अशुद्धि हो तो इनके कारण एक किलोमीटर दूरी मापने में एक मि० मी० की त्रुटि आ सकती है। अतः ताप, दाब आदि का प्रेक्षण ठीक से लेने तथा खराब मौसम में काम न करने से त्रुटि में कमी आ सकती है।

दूरी-मापन में त्रुटियाँ

इसके अतिरिक्त दूरी-मापन में अन्य विभिन्न त्रुटियों का समावेश होना भी स्वाभाविक है। ये हैं :—आवर्ती (Periodic) त्रुटि, प्रचालन (Operational) त्रुटि तथा शून्य त्रुटि। आवर्ती त्रुटि के कारण हैं :—अधिमिश्रण (modulation), आवृत्तियों में त्रुटि तथा प्रेषित संग्राहक एवं कलामापक युक्ति के एक दूसरे पर प्रभाव आदि। इन कारणों से उत्पन्न आवर्ती त्रुटि को प्रयोगशाला में यंत्र के भीतर विभिन्न समंजन करके कम किया जा सकता है। प्रचालन त्रुटि यंत्र को काम में लाने वाले व्यक्ति के कारण उत्पन्न होती है। उदाहरणार्थ, स्टेशन के ऊपर यंत्र को ठीक से केन्द्रित न करना तथा यंत्र का, परावर्तक के साथ सिधीकरण ठीक न होना आदि। ये त्रुटियाँ सर्वेक्षक द्वारा पर्याप्त सावधानी बरतने से कम हो सकती हैं। किसी ज्ञात दूरी को यंत्र द्वारा मापने पर जो अन्तर प्राप्त होता है उसे शून्य त्रुटि कहते हैं तथा प्रत्येक यंत्र हेतु इसका मान कुछ न कुछ होता ही है।

शून्य त्रुटि या योज्य स्थिरांक

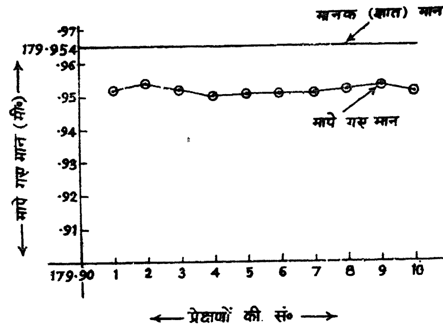
जैसा कि ऊपर स्पष्ट किया गया है, मौसम के कारण आने वाली त्रुटि, आवर्ती त्रुटि तथा प्रचालन त्रुटि को कम से कम किया जा सकता है तथा ऐसा न होने पर दूरी-मापन की यथार्थता में कमी आ जाती है किन्तु शून्य त्रुटि यंत्र की उपर्युक्त त्रुटियों जैसी नहीं होती। इसे स्पष्ट रूप से समझने के लिए हम ऐसा सोच सकते हैं कि यंत्र तथा परावर्तक के जिन बिन्दुओं को स्टेशनों के ऊपर केन्द्रित किया जाता है वास्तव में मापी गई दूरी इन बिन्दुओं के बीच की नहीं होती बल्कि यंत्र तथा परावर्तक के भीतर की किन्हीं दो काल्पनिक बिन्दुओं के बीच की होती है। इन काल्पनिक बिन्दुओं का निश्चित स्थान इसलिए मालूम नहीं होता क्योंकि यंत्र के भीतर विभिन्न अवयवों के लगाने का स्थान अलग-अलग होते हैं, यंत्र के भीतर तरंगों के गमन में कुछ समय लग जाता है तथा परावर्तक के भीतर भी परावर्तन में विलम्ब होता है। अतः यंत्र द्वारा दिखाई गई इस दूरी तथा स्टेशन-बिन्दुओं के बीच की वास्तविक दूरी में सर्वद कुछ अन्तर आता है, भले ही यंत्र तथा परावर्तक को स्टेशन-बिन्दुओं के ठीक ऊपर ही केन्द्रित क्यों न किया गया हो। यह अन्तर ही शून्य त्रुटि होती है जिसे एक स्थिरांक के रूप में माना जा सकता है। अगर इसका निर्धारण किसी भी विधि से ठीक तरह कर लिया जाय तथा यंत्र द्वारा मापी गयी दूरी में इसे शुद्धि के रूप में लगा दिया जाय तो सही दूरी प्राप्त हो जाती है। इसीलिए इसे योज्य स्थिरांक कहा जाता है। यह सर्वदा यंत्र तथा उसके परावर्तक (लक्ष्य) के लिए सम्मिलित रूप से होता है तथा प्रत्येक यंत्र-निर्माता इसका निर्धारण कर मान बताते हैं। कुछ निर्माता यंत्र के भीतर आवश्यक समंजन कर इस स्थिरांक का मान सुविधा हेतु शून्य कर देते हैं। किन्तु यंत्र की मरम्मत तथा परिवहन आदि के बाद योज्य स्थिरांक का मान पुनः निकाल लेना आवश्यक होता है।

इस लेख में अवरक्त दूरी मापक यंत्र के योज्य स्थिरांक का मान दो विधियों द्वारा निकालकर निष्कर्ष निकाला गया है। ये विधियाँ हैं : (क) ज्ञात दूरी की माप तथा (ख) अज्ञात दूरी की माप द्वारा।

प्रयोगात्मक

(क) ज्ञात दूरी (आधार रेखा) पर प्रेक्षण

(अ) ज्ञात दूरी के केवल एक भाग की माप : देश के कुछ भागों में अत्यंत परिशुद्ध विधियों से कुछ दूरियाँ या आधार रेखायें (बेस लाइन्स) मापी गयी हैं। ऐसी ही एक आधार रेखा, जो इन्वार तारों से मापी गयी है, देहरादून में उपलब्ध है। इसके एक भाग को एक अवरक्त दूरी मापक यंत्र से मापा गया तथा उन 10 प्रेक्षणों को सारणी 1 एवं चित्र 2 में दिखाया गया है। माप लेते समय आकाश में बादल थे तथा हल्की वर्षा हो रही थी। ताप 29 डिग्री से० तथा वायु दाब 692 मि०मी० था। इसके लिए 69 पी० पी० एम० की शुद्धि यंत्र में लगायी गयी जिससे लिए गये प्रेक्षण स्वत: मौसम के प्रभाव से मुक्त थे। निर्माता द्वारा इस यंत्र की शून्य त्रुटि बताई गई थी।



चित्र 2

सारणी 1 के प्रेक्षणों का औसत मान 179.9517 मीटर है जबकि ज्ञात दूरी 179.9654 मी० थी। इस तरह शून्य त्रुटि, जो इन दोनों मानों का अन्तर होती है, +13.7 मि० मी० निकली।

किसी दूरी को एक बार ही में माप कर प्राप्त मान उतने विश्वसनीय नहीं माने जाते तथा उनके आधार पर निर्धारित शून्य त्रुटि विशेष सही मानना संदेहपूर्ण होता है। अत: दो बार और, अर्थात् तीन बार प्रेक्षण लिये गये तथा प्रत्येक बार दस-दस मापें की गयीं। ये मापें एकबार गर्मी के मौसम में तथा दूसरी बार जाड़े के मौसम में ली गयीं। जो औसत मान प्राप्त हुए उन्हें सारणी 2 में दिखाया गया है। ज्ञात मान से जो अन्तर प्राप्त हुआ वह +10.6 मि० मी० था जो पहली बार निर्धारित शून्य त्रुटि (13.7 मि० मी०) से कम था। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि किसी ज्ञात दूरी पर अधिक बार लिये गये प्रेक्षणों से निर्धारित शून्य त्रुटि एक बार लिए हुए प्रेक्षणों पर आधारित शून्य त्रुटि से अधिक सही होती है।

(ब) ज्ञात दूरी के एक से अधिक भागों की माप : किसी ज्ञात दूरी के एक से अधिक भागों (यहाँ 5) को उसी यंत्र द्वारा मापा गया तथा प्राप्त मानों को सारणी 3 में दिखाया गया है। प्रत्येक भाग की ज्ञात दूरी तथा मापी गयी दूरी का अंतर भी सारणी 3 में दिखया गया है जो शून्य त्रुटि का द्योतक

है। इन पाँच मानों का औसत—7 मि० मी० प्राप्त हुआ जो कि यंत्र की शून्य त्रुटि या योज्य स्थिरांक है। यह मान ऊपर निर्धारित दो मानों, अर्थात् +13.7 एवं 10.7 मि० मी०, से कम है। सारणी 4 में योज्य स्थिरांक के सभी मानों को दिखाया गया है। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि योज्य स्थिरांक का सही से सही मान प्राप्त करने के लिए ज्ञात दूरी के एक से अधिक भागों को मापना आवश्यक है।

सारणी 1

ज्ञात दूरी (आधार-रेखा) के एक भाग पर एक बार के प्रेक्षण (दस मापें)

1.	179.952 मी०
2.	179.954
3.	179.952
4.	179.950
5.	179.951
6.	179.951
7.	179.951
8.	179.952
9.	179.953
10.	179.951
औसत	=179.9517 मीटर

सारणी 2

ज्ञात दूरी के एक भाग पर तीन बार के प्रेक्षण (प्रत्येक प्रेक्षण में 10 मापें)

तीन बार मापी गई औसत दूरियाँ (मी०)	तीनों का औसत (मी०)	ज्ञात दूरी (मी०)	अन्तर (मि० मी०)
179.9517 179.9300 179.9826	179.9548	179.9654	+ 10.6

सारणी 3

ज्ञात दूरी के 5 भागों पर एक-एक बार के प्रेक्षण (प्रत्येक प्रेक्षण में 10 मापें)

भागों की ज्ञात दूरियाँ (मी०)	मापी गईं दूरियाँ (मी०)	प्राप्त अंतर (योज्य स्थिरांक) (मि० मी०)	औसत अन्तर (योज्य स्थिरांक) (मि० मी०)
479.822	479.823	— 1	
99.982	99.996	—14	
79.983	79.992	— 9	—7 मि० मी०
119.939	119.951	—12	
179.918	179.919	— 1	

सारणी 4

योज्य-स्थिरांक के विभिन्न मान

(1)	निर्माता द्वारा निर्धारित—	0
(2)	आधार-रेखा के एक भाग पर एक बार के प्रेक्षणों से निर्धारित—	+ 13.6 मि० मी०
(3)	आधार-रेखा के एक भाग पर तीन बार के प्रेक्षणों से निर्धारित—	+10.6 मि० मी०
(4)	आधार-रेखा के 5 भागों पर एक-एक बार के प्रेक्षणों से निर्धारित—	—7 मि० मी०

सारणी 5

योज्य स्थिरांक के निर्धारण हेतु ज्ञात एवं अज्ञात आधार-रेखा विधियों की तुलना

आधार-रेखा के भाग	मापी गई दूरियाँ (मी०)	सूत्र 1 से योज्य स्थिरांक का मान मि० मी० में (अ स—(अ ब +बस)	ज्ञात मान (मी०)	अंतर (योज्य स्थिरांक (ज्ञात दूरी विधि से)	औसत यो० स्थि० (मि० मी०)
अ स	999.743		999.749	+3 मि० मी०	
अ ब	299.898	—2.0	299.899	+1 मि० मी०	+1.3
ब स	699.847		699.847	0 मि० मी०	

(ख) अज्ञात दूरी (आधार रेखा) पर प्रेक्षण

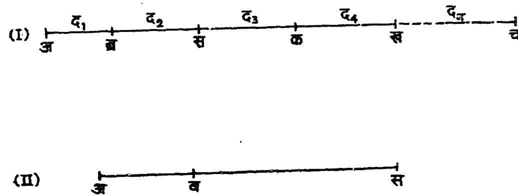
जहां ज्ञात आधार रेखा नहीं हो वहां कोई अज्ञात दूरी लेकर भी योज्य स्थिरांक निकाला जा सकता है। इसके लिए उस दूरी में कुछ भाग बनाये जाते हैं। प्रत्येक भाग तथा पूरी दूरी की लम्बाई यंत्र द्वारा मापी जाती है तथा निम्नलिखित सूत्र द्वारा योज्य स्थिरांक की गणना की जाती है :

$$\text{योज्य स्थिरांक} = \frac{\text{अच} - \sum_{\text{प}=1}^{\text{न}} \text{द}_{\text{प}}}{(\text{न}-1)} = \frac{\text{पूरी दूरी—कुल भागों की दूरियों का योग}}{(\text{कुल भाग}-1)} \qquad (1)$$

सूत्र (1) में चित्र 3 (1) के अनुसार अ च पूरी दूरी है, तथा द_1, द_2.........$\text{द}_{\text{न}}$ इस दूरी में न भाग हैं। नीचे दो स्थितियां दर्शाई गई हैं :

(अ) अज्ञात दूरी के दो भाग करके

शीघ्रता से योज्य स्थिरांक ज्ञात करने हेतु अज्ञात दूरी में कम से कम दो भाग करना आवश्यक होता है। किन्तु कुछ हद तक सही मान तभी प्राप्त होता है जबकि काफी वार मापें की जायें।



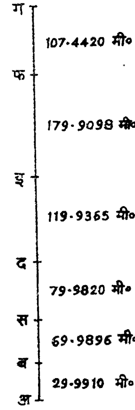
चित्र 3

चित्र 3 (II) में अ स एक दूरी है जिसमें अ ब तथा ब स दो भाग बनाये गए हैं। इन तीनों दूरियों को एक अवरक्त दूरी मापक यंत्र से मापा गया। इनके मान दूसरी अच्छी विधि से भी ज्ञात किए गए थे। सारणी 5 के कालम 3 में यंत्र द्वारा मापी गईं दूरियों के आधार पर उपर्युक्त सूत्र से योज्य स्थिरांक निकाला गया है तथा कालम 6 में इन दूरियों के ज्ञात मानों के आधार। पर चूंकि निर्माता द्वारा यंत्र का योज्य स्थिरांक शून्य बताया गया था अतः कालम 5 का मान कालम 3 के मान से अधिक सही है। अर्थात् ज्ञात दूरी विधि से निर्धारित मान अज्ञात दूरी विधि से निर्धारित मान से अधिक सही पाया गया।

(ब) अज्ञात दूरी के दो से अधिक भाग करके :

इस विधि से और सही मान प्राप्त करने हेतु दूरी के छह भाग किए गए। भाग करते समय यह ध्यान रखना आवश्यक है कि सभी स्टेशन-बिन्दु एक सीध में हों, भागों की दूरियाँ अलग-अलग हों तथा छोटी एवं बड़ी सभी प्रकार की दूरियाँ शामिल की जायँ। कुछ दूरी 500 मीटर के लगभग ही रखना ठीक रहता है ताकि वायुमंडल की स्थिति समान रहे।

चित्र 4 में ऐसी दूरी के छह भाग दिखाए गए हैं। ऐसे तो इनके मान ज्ञात थे किंतु उन पर ध्यान दिए बिना ही यंत्र द्वारा विभिन्न दूरियाँ मापी गई, मानों ये दूरियाँ अज्ञात हों। छह भागों से 21



चित्र 4

सारणी 6

अ ब, अ स, अ द, अ इ, अ फ, अ ग
ब स, ब द, ब इ, ब फ, ब ग,
स द, स इ, स फ, स ग,
द इ, द फ, द ग
इ फ, इ ग
फ ग.

सारणी 7

एक अज्ञात दूरी के सात बिन्दुओं के बीच मापने पर प्राप्त 21 औसत दूरियाँ

(चित्र 4 की दूरियों को ही अज्ञात मानकर यंत्र से मापा गया तथा निम्नलिखत 21 मान प्राप्त हुए। प्रत्येक मान 10 प्रेक्षणों के औसत हैं तथा मीटर में हैं।)

बिन्दु	ब					
अ	29.9814	99.9711	179.9559	299.9042	479.8110	587.2501
ब	—	69.9884	149.9740	269.9126	449.8299	557.2705
स	—	—	79.9835	199.9218	379.8344	487.2769
द	—	—	—	119.9456	299.8532	407.3004
इ	—	—	—	—	179.9212	287.3636
फ	—	—	—	—	—	107.4511

दूरियाँ बनती है जो सारणी 6 में दिखाई गई हैं। इन सबकी मापें यंत्र द्वारा की गईं जिन्हें सारणी 7 में दिखाया गया है। सूत्र (1) से योज्य-स्थिरांक के निम्नलिखित 15 मान निकाले गए जिनका औसत मान —4.3 मि० मी० प्राप्त हुआ। यह मान सारणी 3 में निकाले मान (—4.1 मि० मी०) के नजदीक आया जिससे यह निष्कर्ष निकला कि अज्ञात दूरी के अधिक भाग बनाकर योज्य स्थिरांक निकालने से मान सही प्राप्त होगा।

1. $\frac{\text{अ ग}-(\text{अ ब}+\text{ब स}+\text{स द}+\text{द इ}+\text{इ फ}+\text{फ ग})}{6-1}=-0.0042$ मी०

2. $\frac{\text{अ फ}-(\text{अ ब}+\text{ब स}+\text{स द}+\text{द इ}+\text{इ फ})}{5-1}=-0.0023$ मी०

3. $\frac{\text{अ इ}-(\text{अ ब}+\text{ब स}+\text{स द}+\text{द इ})}{4-1}=+0.0018$ मी०

4. $\frac{\text{अ द}-(\text{अ ब}+\text{ब स}+\text{स द})}{3-1}=+0.0013$ मी०

5. $\frac{\text{अ स}-(\text{अ ब}+\text{ब स})}{2-1}=+0.0013$ मी०

6. $\frac{\text{ब ग}-(\text{ब स}+\text{स द}+\text{द इ}+\text{इ फ}+\text{फ ग})}{5-1}=-0.0048$ मी०

7. $\frac{\text{ब फ}-(\text{ब स}+\text{स द}+\text{द इ}+\text{इ फ})}{4-1}=-0.0029$ मी०

8. $\frac{\text{ब ई}-(\text{ब स}+\text{स द}+\text{द इ})}{3-1}=-0.0025$ मी०

9. $\frac{\text{ब द}-(\text{ब स}+\text{स द})}{2-1}=+0.0021$ मी०

10. $\frac{\text{स ग}-(\text{स द}+\text{द इ}+\text{इ फ}+\text{फ ग})}{4-1}=-0.0082$ मी०

11. $\frac{\text{स द}-(\text{स द}+\text{द इ}+\text{इ फ})}{3-1}=-0.0080$ मी०

12. $\frac{\text{स इ}-(\text{स द}+\text{द इ})}{2-1}=-0.0073$ मी०

13. $\frac{\text{द ग}-(\text{द इ}+\text{इ फ}+\text{फग})}{3-1}=-0.0088$ मी०

14. $\frac{\text{द फ}-(\text{द इ}+\text{इ फ})}{2-1}=-0.0136$ मी०

15. $\frac{\text{इ ग}-(\text{इ फ}+\text{फ ग})}{2-1}=-0.0087$ मी०

औसत योज्य स्थिरांक $=-0.0043$ मी०

$=-4.3$ मि० मी०

सारणी 8

ज्ञात दूरी विधि से निर्धारित योज्य स्थिरांक

क्र० सं०/दूरियाँ	ज्ञात मान (मी०) "क"	मापने पर प्राप्त मान (मी०) "ख"	अंतर (योज्य स्थिरांक) "क"—"ख" (मी०)
1. अ ब	29.9910	29.9814	+0.0096
2. अ स	99.2806	99.9711	+0.0095
3. अ द	179.9626	179.9559	+0.0067
4. अ इ	299.8991	299.9042	−0.0052
5. अ फ	479.8089	479.8110	−0.0021
6. अ ग	587.2509	587.2501	+0.0008
7. ब स	69.9896	69.9884	+0.0012
8. ब द	149.9716	149.9740	−0.0024
9. ब इ	269.9081	269.9126	−0.0045
10. ब फ	449.8179	449.8299	−0.0120
11. ब ग	557.2599	557.2705	−0.0106
12. स द	79.9820	79.9835	−0.0015
13. स इ	199.9185	199.9218	−0.0033
14. स फ	379.8283	379.8344	−0.0061
15. स ग	487.2703	487.2769	−0.0066
16. द इ	119.9365	119.9456	−0.0091
17. द फ	299.8463	299.8532	−0.0069
18. द ग	407.2883	407.3004	−0.0121
19. इ फ	179.9098	179.9212	−0.0114
20. इ ग	287.3518	287.3366	−0.0118
21. फ ग	107.4420	107.4511	−0.0091
			कुल=−0.0868

औसत योज्य स्थिरांक=−4.1 मि० मी०

परिणाम तथा विवेचना

चूँकि चित्र 4 की छह दूरियाँ पहले से ज्ञात थीं अतः ज्ञात दूरी विधि से भी योज्य स्थिरांक निकाला गया। इन छह भागों से जो 21 दूरियाँ बनीं उन्हें तथा यंत्र द्वारा मापी 21 दूरियाँ सारणी 8 में दिखाई हैं। जो औसत योज्य स्थिरांक प्राप्त हुआ वह —4.1 मि० मी० था। यह मान अज्ञात दूरी विधि से निर्धारित मान (—4.3 मि० मी०) के काफी नजदीक था। इससे यह निष्कर्ष निकला कि अज्ञात दूरी विधि से भी काफी मापें (21 या अधिक) लेकर निर्धारित मान उतना ही सही आयेगा जितना ज्ञात दूरी विधि से प्राप्त मान।

निष्कर्ष

उपर्युक्त प्रयोगों के बाद प्राप्त परिणामों से निम्नलिखित निष्कर्ष निकले :

1. निर्माता द्वारा योज्य स्थिरांक का मान देने के बाद भी मरम्मत एवं परिवहन के बाद इसे पुनः निर्धारित करना आवश्यक है।
2. किसी एक ज्ञात दूरी को ही मापकर निकाला गया मान विश्वसनीय नहीं माना जा सकता। अतः अनेक ज्ञात दूरियाँ मापना आवश्यक है।
3. अज्ञात दूरी के केवल दो भाग करके ही निकाला मान विश्वसनीय नहीं होगा।
4. अगर ज्ञात दूरियाँ उपलब्ध नहीं हों तो अज्ञात दूरी के छह भाग करके 21 मापों पर आधारित मान भी उतना ही सही होगा जितना ज्ञात 21 दूरियों से निकाला मान।

निर्देश

1. बर्नसाइड, सी० डी०, Electromagnetic distances measurement, क्रांसबाई लॉकउड स्टेपुल्स, लंदन 1977.
2. बेवीन, ए० जे० तथा फार्स्टर, टी० ए०, Evolution of laser Geodemeter, मई 1973.
3. स्वेन्डेनर, एच० आर०, Electronic distances for short ranges, Survey review, अप्रैल-जून 1972.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 31, No. 2-3, 1988

दृश्य, अवरक्त तथा लघुतरंग विकिरणों द्वारा नैफ्थेलीन-वाष्प में जोशी प्रभाव का तुलनात्मक अध्ययन

जगदीश प्रसाद
रसायन विभाग, मेरठ कालिज, मेरठ

[प्राप्त—अगस्त 6, 1988]

सारांश

ओजोनित्र उत्तेजन द्वारा नैफ्थेलीन-वाष्प में ऋणात्मक जोशी प्रभाव $-\Delta i$ किरणन-स्रोत की आवृत्ति के साथ बढ़ता जाता है। अथच, यह इस क्रम परिवर्तित होता है : दृश्य>एक्स>बीटा-गामा >अवरक्त। अवरक्त द्वारा $+\Delta i$ तथा $-\Delta i$ दोनों का प्रेक्षण हुआ; 1.60 kV पर $-\Delta i$ 5.4% था। उपर्युक्त समस्त परिणामों की व्याख्या Δi के लिए जोशी सिद्धान्त के आधार पर की गई है।

Abstract

Comparative studies of the Joshi effect in naphthalene-vapour under visible, infra-red and short wave radiations. *By* Jagdish Prashad, Chemistry Department, Meerut College, Meerut.

The negative joshi effect—Δi in naphthalene-vapour under ozonizer excitation increases with the frequency of the irradiating source. Both $+\Delta i$ and $-\Delta i$ were observed with infrared; at 1.60 kV, $-\Delta i$ was 5.4%. All the above results are explained on the basis of Joshi theory for the phenomenon Δi.

किरणन-स्रोत की प्रकृति पर जोशी प्रभाव Δi की उल्लेखनीय निर्भरता का प्रस्ताव प्रारम्भिक शोधकर्ताओं द्वारा हुआ है।[1,2] चरम रक्त,[3] दृश्य के विविध भाग,[4] परा-बैंगनी[5] तथा एक्स-किरणों[6] द्वारा Δi का प्रेक्षण हुआ है। अतः अवरक्त, दृश्य, एक्स तथा बीटा-गामा विकिरणों द्वारा नैफ्थेलीन-वाष्प में Δi के तुलनात्मक अध्ययन में रुचि उत्पन्न हुई।

प्रयोगात्मक

सामान्य प्रयुक्त उपकरण की सज्जा तथा विद्युत् परिपथ पूर्व प्रकाशित[7] विधि के समान रहे हैं। सीमेन्ज-प्रकार के काँच-ओजोनित्र को क्रोमिक अम्ल तथा आसुत जल से धोकर, 200° से० पर सुखाकर, इसकी तली में जुड़ी छोटी-सी बल्ब में लगभग 1 ग्राम परिशोधित ठोस नैफ्थेलीन (गलनांक =80° से०) रखा गया। टॉप्लर पम्प द्वारा विसर्जन नली को निर्वातित करके, $pC_{10}H_8=0.2$ मिमी पारद 34° से० पर मुँहबंद कर दिया गया।

एक सुग्राही परावर्तन धारामापी की सहायता से विसर्जन-धारा का मापन अंधकार में (i_D), 200 वाट बल्ब (i_L), एक्स-किरण (i_x) तथा बीटा-गामा ($i_{\beta-\gamma}$) स्रोतों से किरणन के दौरान किया गया। $\triangle i=i_y-i_D$, जबकि $y=L$ या ir या x या $\beta-\gamma$ तथा $\%\triangle i=100\triangle i/i_D$.

200 वाट 220 वोल्ट तापदीप्त टंग्स्टन-तंतु (कांच में) के एक बल्ब को दृश्य (3700—7800 $A°$) विकिरणों के स्रोत के रूप में प्रयुक्त किया गया प्रकाश-स्रोत के सन्मुख रैटन एकवर्णित्र 71 A, 74, 76 तथा 87 की सहायता से संकीर्ण एकवर्णी बैन्डों को प्राप्त किया गया। हिल्गर स्थिर विलचन स्पेक्ट्रोग्राफ की सहायता से कोडक पनक्रोमेटिक P 1200 प्लेटों पर आलेखित स्पेक्ट्रमों से पारगमन सीमाएं तथा कार्यकारी माध्य आवृत्तियों को ज्ञात किया गया। 3-4 सेमी लंबा एवं 0.14 सेमी व्यास का तथा Ptग्रिडों परिपूर्ण एक प्रामाणिक 76 वोल्ट इन्सल्कन ग्लोवर अवरक्त-स्रोत था। KBr-गवाक्ष (027 —1203), 5—12—1, 35 मिमी×5 मिमी फिल्टर था। एक्स-विकिरणों को एक 112pkV पिकर एक्स-किरण ः लेका से प्राप्त किया गया। बीटा-गामा विकिरणों के लिए रेडियम बीटा-गामा किरण-स्रोत को प्रयुक्त किया गया।

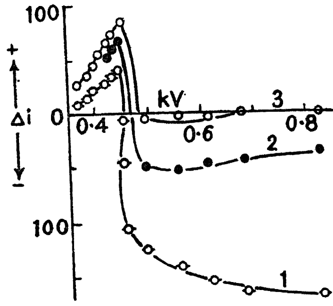
परिणाम तथा विवेचना

प्रेक्षित ऋणात्मक जोशी प्रभाव $-\triangle i$ का क्रम है : दृश्य>एक्स>बीटा-गामा>अवरक्त (चित्र 1—3); $+\triangle i$ का मान बीटा-गामा किरणों में अधिकतम है (चित्र 1)। जोशी-लक्ष्मीनारायणय्या समीकरण[9,10] ($\triangle i=aI^b$) की अपेक्षा के अनुसार, बीटा-गामा किरणों के लिए $\log I-\log(+\triangle i)$ के आलेख लगभग रैखिक हैं (चित्र 4)।

$\triangle i$ के लिए प्रतिपादित जोशी सिद्धान्त[1,2] के आधार पर, $-\triangle i$ में वृद्धि (क) उत्सर्जित प्रकाशिक इलेक्ट्रॉनों की संख्या तथा (ख) संलयन-प्रायिकता[11] P, में परिवर्तन के कारण होती है। प्रकाशिक इलेक्ट्रॉनों के वेग शून्य से v_{max} के परिसर में होते हैं, जिन्हें निम्नांकित आइन्सटाइन समीकरण से ज्ञात किया जा सकता है :

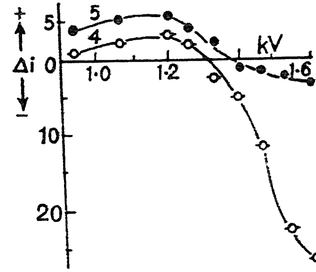
$$h\nu=\phi+\tfrac{1}{2}mv^2_{max}=h\nu_0+\tfrac{1}{2}mv^2_{max}.$$

अथच, इकाई समय में ν तथ $\nu+d\nu$ परिसर की आवृत्ति की अवशोषित प्रकाश की मात्रक तीव्रता के निष्कासित समस्त वेगों वाले इलेक्ट्रॉनों की कुल संख्या सूत्र $dn=F(\nu)d\nu$ से प्रदर्शित होती है, जबकि $F(\nu)$ स्पेक्ट्रमी वितरण फलन है। ν_0 से नीचे उत्सर्जन शून्य होता है, तथा $\nu(>\nu_0)$ के साथ बढ़ता जाता है। अतः $\pm\triangle i$ में बृद्धि होती है, जैसा कि प्रस्तुत अध्ययन में प्रेक्षण हुआ है।



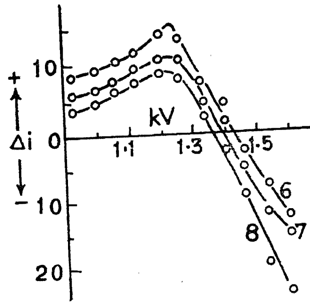
चित्र 1

चित्र 1—(1) दृश्य, (2) एक्स तथा (3) बीटा-गामा किरणों द्वारा नैफ्थेलीन-वाष्प में जोशी प्रभाव $\triangle i$ का विभव V के साथ परिवर्तन ।



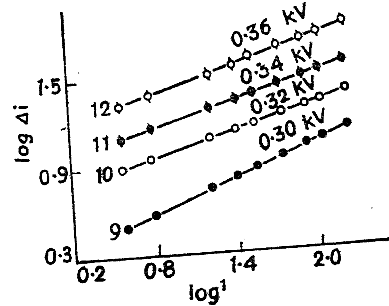
चित्र 2

चित्र 2—(4) दृश्य तथा (5) अवरक्त विकिरणों द्वारा नैफ्थेलीन-वाष्प में जोशी प्रभाव $\triangle i$ का विभव V के साथ परिवर्तन ।



चित्र 3

चित्र 3—(6) 45.44×10^{13} (7) 55.29×10^{13} तथा (8) 65.55×10^{13} किरणन-आवृत्ति के द्वारा नैफ्थेलीन-वाष्प में $\triangle i$ का विभव V के साथ परिवर्तन ।



चित्र 4

चित्र 4—(9) 0.30, (10) 0.32, (11) 0.34 तथा (12) 0.36 kV पर बीटा-गामा विकिरणों द्वारा नैफ्थेलीन-वाष्प में $\log I$ तथा $\log(+\triangle i)$ का आलेख ।

इस पर अध्यारोपण से, इलेक्ट्रॉन-ऊर्जा में तात्क्षणिक वृद्धि से हुई इलेक्ट्रॉन प्रग्रहण की प्रायिकता P में ह्रास के कारण $-\triangle i$ में कमी होती है।

किरणन के दौरान, अतिरिक्त अन्तराकाशी आवेश से, टाउन्सेंड अवधावों द्वारा निर्मित अन्तराकाशी आवेश में वृद्धि हो जाती है जिसका परिणाम α में ह्रास तथा अन्ततः धारा में ह्रास में होता है।[12] इस प्रकार, (क) उच्च आवृत्ति स्पंद कोरोना 'ट्रिचल स्पंदों' के समान हैं क्योंकि इनमें से प्रत्येक की द्रुत वृत्ति के दौरान इलेक्ट्रॉनीय गति (कार्यकारी समय t_a) की और मंद अधोपात के दौरान धनात्मक आयनीय गति (निर्मलन समय t_m) की विशेषता होती है, जबकि $i=Q/(t_a+t_m)$, जिसमें (t_a+t_m) के दौरान आवेश Q है।

(ख) कार्यकारी समय के दौरान उत्सर्जित इलेक्ट्रॉन टाउन्सेंड अवधावों को उत्पन्न करते हैं, जिनसे कैथोड तथा प्रारम्भिक अन्तराकाशी आवेश के मध्य एक अतिरिक्त अन्तराकाशी आवेश शेष बच जाता है।

(ग) यह निर्मित अधिरिक्त अन्तराकाशी आवेश ऐनोड के समीपस्थ क्षेत्र को घटा देता है, जो स्पंद की ऊँचाई के ह्रास का कारण बनता है तथा आवरणी क्रिया के कारण निर्मलन समय tm बढ़ जाता है; तथा अन्ततः

(घ) t_a तथा t_m के दौरान किरणन परिणाम होता है।

एक्स तथा बीटा-गामा किरणों के सदृश तीव्र आयनीकारक विकिरणों से प्रभावित करने पर $+\Delta i$ तथा $-\Delta i$ के सह-अस्तित्व की व्याख्या Δi के लिए जोशी प्रभाव के विस्तार [1,2] के द्वारा सम्भव है। उच्च आयनीकारक क्षमता के कारण, विकिरणों से माध्यम का आयनीकरण होता है, जिससे उच्च ऊर्जायुक्त इलेक्ट्रॉन मुक्त होते हैं। V_m से नीचे के विभवों पर जो, न्यून क्षेत्र तथा मुक्त इलेक्ट्रॉनों के उच्च वेग के कारण, ऋण आयन निर्माण के लिए अनुकूल नहीं है, ये इलेक्ट्रॉन धनात्मक प्रभाव $+\Delta i$ को उत्पन्न करते हैं। अतः एक्स-किरणों के द्वारा अधिक $+\Delta i$ का प्रेक्षण होता है। V_m से ऊपर के विभवों पर, जहाँ $-\Delta i$ विद्यमान होता है, जनित धन आयनों की बड़ी संख्या के प्रभाव की उपेक्षा नहीं की जा सकती। सीमांत-परत के आस-पास इन धन आयनों के अधिक जमाव के कारण, इन दोनों की विद्युतीय द्विस्तर के रूप में कल्पना की जा सकती है, इलेक्ट्रॉनों की मुक्ति के लिए विरोधी बल के कारण, परत का कार्य-फलन बढ़ जाएगा। $V>>V_m$ पर मुक्त कतिपय इलेक्ट्रॉन उन धन आयनों द्वारा प्रभावित होंगे जो उनकी गति में मंदक शक्ति का कार्य करते हैं तथा उदासीन अणु बनने की पुनर्मिलन-गति को बढ़ाते हैं। चूँकि मुक्त इलेक्ट्रॉनों का ऋण आयनों के निर्माण पर, उनके उच्च वेगों के कारण प्रभाव अनुकूल नहीं होता, इससे प्रेक्षित अल्प $-\Delta i$ की व्याख्या सम्भव है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

डॉ० पी० एस० राव के अमूल्य सुझावों के लिए लेखक आभारी है।

निर्देश

1. जोशी, एस० एस०, **करेंट साइंस**, 1947, 16, 19.

2. जोशी, एस० एस०, **प्रेसी० इण्डियन साइंस कांग्रे०, प्रेजिड० ऐड०, केमि० सेक०** 1943.

3. जोशी, एस० एस०, **जर्न० साइं० रिस० बी० एच० यू०**, 1943, **8**, 99.

4. जोशी, एस० एस०, **करेंट साईंस**, 1945, **14**, 317.

5. रमय्या, एन० ए०, **जर्न० साइं० इन्डस्ट० रिस०**, 1951, **10 B**, 27.

6. जाटार, डी० पी०, **प्रोसी० इण्डियन साइंस कांग्रे०** 1951, **फिजि० सेक०**, **ऐब्स्ट०** 27.

7. प्रसाद, जे०, **ऐक्टा सिएन्सिया इण्डिका**, 1974, **1**, 13.

8. प्रसाद, जे०, **सिएन्सिया इ कल्चरा**, 1978, **30**, 78.

9. जोशी, एस० एस०, तथा लक्ष्मीनारायणय्या एन०, **प्रोसी० इण्डियन साइंस कांग्रे०**, 1945, **फिजि० सेक०**, ऐब्स्ट० 12.

10. प्रसाद, जे०, **विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका**, 1979, **22**, 143.

11. ह्यूजेज, ए० एल० तथा ड्युब्रिज, एल० ए०, "फोटोइलेक्ट्रिक फिनोमेना," मैकग्रॉहिल, न्यूयार्क, 1932.

12. बिल्किन्सन, डब्लू०, "आयोनाइजेशन चैम्बर्स एण्ड काउन्टर्स," कैम्ब्रिज मोनोग्राफ, 1950.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 31. No. 4, 1988

द्विअंगी निकायों से अकार्बनिक अवक्षेपों द्वारा कार्बनिक अम्लों के अधिशोषण का व्यतिकरण

जगदीश प्रसाद तथा कान्ति प्रसाद

रसायन विभाग, मेरठ कालेज, मेरठ

[प्राप्त—अक्टूबर 2, 1987]

सारांश

जलीय माध्यम में टार्टरिक, लैक्टिक, सक्सिनिक, फॉर्मिक तथा थैलिक अम्लों का अकार्बनिक अधिशोषकों-Fe_2O_2, Cr_2O_3, $BaSO_4$ तथा Al_2O_3 द्वारा अधिशोषण के अध्ययन के लिये हिल्गर-रेले व्यतिकरणमापी को प्रयुक्त किया गया। अधिशोषकों पर विलेय तथा विलायक दोनों को अधिशोषित पाया गया। प्राप्त परिणामों की व्यख्या बीईटी-समीकरण के आधार पर की गई है।

Abstract

An interfeometric investigation of adsorpation of organic acids by inorganic precipitates from aqueous binary systems. *By* Jagdish Prashad and Kanti Prashad, Chemistry Department, Meerut College, Meerut.

The Hilger-Rayleigh interferometer has been employed to follow, in aqueous medium, the adsorption of tartaric, lactic, succinic, formic and phthalic acids by inorganic adsorbents-Fe_2O_3, Cr_2O_3, $BaSO_4$ and Al_2O_3. Both the solute and solvent have been found to be adsorbed on the adsorbents. The results have been interpreted in the light of the BET equation.

बीईटी-समीकरण[1] इस कल्पना पर आधृत है कि पार्थक्य पृष्ठ पर अधिशोषण एक परत के निर्माण पर समाप्त नहीं होता है वरन् बहुपरतों का निर्माण हो सकता है। अधिशोषण सम्बन्धी साहित्य के अवलोकन से पता लगता है कि ठोसों द्वारा गैसों के अधिशोषण पर पर्याप्त कार्य हुआ है तथापि, विलयनों से अधिशोषण पर किया गया कार्य उतना विस्तृत नहीं है। विलयनों से अधिशोषण का कार्य

अधिकांशत: फ्रायन्डलिक या लेंगम्यूर समीकरणों की अनुप्रयोज्यता ज्ञात करने तक सीमित रहा है और कुछ ही अन्वेषणों में बीईटी-समीकरण का अनुप्रयोग किया गया है ।

विलयनों के मामले में अधिशोषक के पृष्ठ पर विलेय तथा विलायक दोनों के अणुओं के समान अधिशोषण की सम्भावना है । गैसीय अधिशोषण के लिये विकसित गणितीय समीकरणों को विलयनों से अधिशोषण के लिये प्रयुक्त करना दुःसाध्य है । इस दिशा में किया गया अधिकांश कार्य इस कल्पना पर आधृत है कि विलेय के साथ विलायक के अणुओं का अधिशोषण बिल्कुल नहीं होता है या फिर नगण्य मात्रा में होता है । अथच, वह कार्य न्यून विलेयता वाले कार्बनिक यौगिकों के विलयनों तक सीमित रहा है । पर्याप्त विलेयता वाले कार्बनिक यौगिकों के लिये या उस अवस्था में जबकि घटक परस्पर मुक्त रूप से विलेय हों, उन गणितीय समीकरणों को अनुप्रयुक्त करने का प्रयास नहीं किया गया है । अत: प्रस्तुत लेख में बहुपरतीय ब्रूनोअर-एमेट-टेलर (बीईटी) समीकरण की सहायता से, अकार्बनिक अवक्षेपों द्वारा अत्यन्त विलेय कार्बनिक अम्लों का जलीय विलयनों से अधिशोषण का अध्ययन किया गया है ।

प्रयोगात्मक

हिल्गर-रेले व्यतिकरण-अपवर्तनांकमापी की सहायता से Fe_2O_3, Cr_2O_3, $BaSO_4$ तथा Al_2O_3 सदृश अकार्बनिक अधिशोषकों के द्वारा अतिविलेय अनेक कार्बनिक अम्लों-टार्टरिक, लैक्टिक, सक्सिनिक, फॉर्मिक तथा थैलिक अम्लों के अधिशोषण का अध्ययन किया गया । अधिशोषकों को बनाने के लिये उनके हाइड्रॉक्साइडों को उनके जलीय विलयनों से अवक्षिप्त करके, विद्युत-अपघट्यों से मुक्ति के लिये धोकर, सुखाकर, उनके ऑक्साइडों में परिवर्तित करने या/तथा जल वाष्प दूर करने के लिये गर्म किया गया । तत्पश्चात् उन्हें पीसकर 100 जाल की छन्नी से छाना गया ।

अध्ययनार्थ कार्बनिक अम्ल के मानक विकयन के एक निश्चित आयतन को अधिशोषक की तुली हुई मात्रा (लगभग 0.5 ग्राम)में डालकर, अभीष्ट मिश्रण के लिये विलोडित करके, उपयुक्त समय-अन्तराल (4-6 घंटे) के लिये, वीच में यदा-कदा विलोडित करते हुये, रख दिया गया । नीचे के स्थूल विलयन को विक्षोभित किये बिना, ऊपर के निथरे द्रव को पिपेट की सहायता से अलग निकालकर व्यतिकरणमापी की सहायता से, उसका आकलन कर लिया गया । व्यतिकरणमापी को इस प्रकार समायोजित किया गया था जिससे इसका निम्न बैन्ड तंत्र दिखलाई देता रहे ।

परिणाम तथा विवेचना

x तथा v के आलेख से x के विविध सुविधाजनक मानों के लिये v के तत्सम्बन्धी मानों को ज्ञात किया गया । यदि अधिशोषित परतों की संख्या$=n=1$, तब, $x=\pi(nx)=\triangle(nx)$, जबकि[2,3]

$$\pi(nx)=x\cdot\frac{(1-x^n)}{(1-x)} \tag{1}$$

तथा $$\Delta(nx)=x\cdot\frac{(1-x^n)-nx^n(1-x)}{(1-x)^2} \tag{2}$$

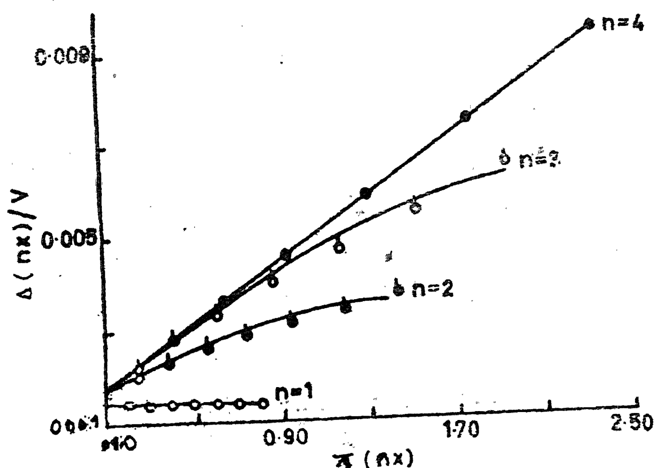
$\pi(nx)$ तथा $\Delta(nx)$ के आलेख ($n=1$, 2, 3 के लिये) से प्राप्त वक्र सरल रेखायें नहीं हैं (चित्र 1); अर्थात् $n=1$, 2, 3 के लिये बीईटी-समीकरण लागू नहीं है। $n=4$ के लिये, समीकरण 1 तथा 2 की सहायता से $\pi(nx)$ तथा $\Delta(nx)/v$ के तत्सम्बन्धी मानों का परिकलन किया गया (सारणी 2 तथा चित्र 1)।

सारणी 1

निकाय: टार्टरिक अम्ल-जल **अधिशोषक** Fe_2O_3

प्रयोगशालीय ताप (30° सें०) **पर टार्टरिक अम्ल की विलेयता** (C)=1460 ग्राम/लीटर

अम्ल की प्रारम्भिक सान्द्रता (ग्राम/लि) C_0	$x=C_0/C$	व्यतिक्रममापी के पाठ्यांकों का अन्तर ΔR	अधिशोषण मान (मिग्रा) v
266.4	0.1825	0.432	125
227.7	0.1560	0.350	111
199.7	0.1368	0.310	95
136.2	0.0933	0.253	80
101.3	0.0694	0.090	35
33.3	0.0228	0.031	10



चित्र 1

$\pi(nx)$ तथा $\triangle(nx)/v$ के आलेख से प्राप्त सरल रेखा की प्रवणता $(1/v_m)$ तथा अंत: खन्ड $(1/v_m.c)$ **से** v_m तथा c के मान प्राप्त होते हैं, जबकि v_m अधिशोषित अधिशोष्य की वह मात्रा है जबकि अधिशोषक का समस्त पृष्ठ एकाणुक-परत[1,2] से आच्छादित है तथा c अधिशोष्य की वह सान्द्रता है जो अधिशोषक के साथ साम्यावस्था में है ।[1,2] बीईटी-समीकरण के आधार पर अम्ल की वह मात्रा (v) जो सिद्धान्त के अनुसार अधिशोषित होनी चाहिये थी, उसके परिकलन के लिये इन मानों को प्रयुक्त किया गया[1], जबकि

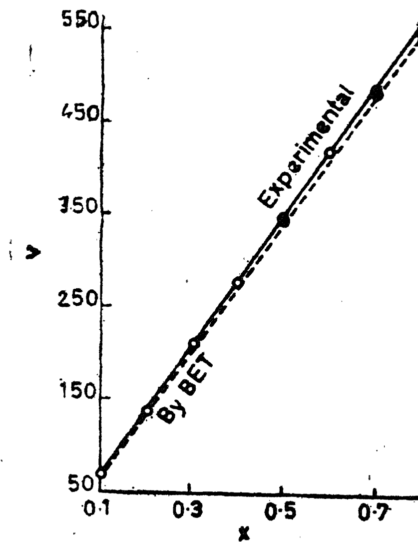
$$v=\frac{v_m.c.x}{(1-x)}\left[\frac{1-(n+1)x^n+n.x^{n+1}}{1+(c-1)x-c.x^{n+1}}\right] \tag{3}$$

बीईटी-समीकरण (3) की सहायता से v के मानों का परिकलन किया गया (सारणी 2, चित्र 2) ।

प्राप्त परिणामों से प्रदर्शित होता हैं कि Fe_2O_3 पर टार्टरिक अम्ल के अधिशोषण से चतुष्टयाणु मोटी परत का निर्माण होता है ।

इसी प्रकार की विधि से विभिन्न निकायों के लिये प्राप्त n के मान सारणी 3 में संकलित हैं ।

अवक्षेपों पर कार्बनिक अम्लों के अधिशोषण के परिणामों से प्रकट होता है कि अधिशोषित परतों की संख्या n का मान 1 से अधिक है । अथच, आँकड़ों से पता लगता है कि प्रयोग द्वारा प्राप्त अधिशोषण के मानों की बीईटी-समीकरण द्वारा परिकलित मानों के साथ बहुत समानता है ।



चित्र 2

सारणी 2

	यदि n=1			यदि n=2			यदि n=3			यदि n=4			(यदि) n=4 v (मिग्रा)	
x	π (nx)	Δ (nx)	Δ (nx)/v	π (nx)	Δ (nx)	Δ (nx)/v	π (nx)	Δ (nx)	Δ (nx)/v	π (nx)	Δ (nx)	Δ (nx)/v	प्रायोगिक	बीईटी से
0.1	0.1	0.1	0.0014	0.11	0.12	0.0017	0.111	0.123	0.0018	0.1111	0.1234	0.0018	70	70.9
0.2	0.2	0.2	0.0014	0.24	0.28	0.0020	0.248	0.304	0.0022	0.2496	0.3111	0.0022	140	139.6
0.3	0.3	0.3	0.0014	0.39	0.41	0.0023	0.417	0.561	0.0027	0.4251	0.5934	0.0028	210	210.9
0.4	0.4	0.4	0.0014	0.56	0.72	0.0026	0.624	0.912	0.0033	0.6496	1.0154	0.0036	280	275.9
0.5	0.5	0.5	0.0014	0.75	1.00	0.0029	0.875	1.395	0.0040	0.9375	1.6250	0.0046	350	347.6
0.6	0.6	0.6	0.0014	0.96	1.32	0.0031	1.176	1.968	0.0047	0.3056	2.4864	0.0059	420	420.1
0.7	0.7	0.7	0.0014	1.19	1.68	0.0034	1.533	0.709	0.0055	1.7731	3.6694	0.0075	490	485.8
0.8	0.8	0.8	0.0014	1.44	2.08	0.0037	1.952	0.616	0.0065	2.3616	5.2544	0.0094	560	546.5

सारणी 3

विविध निकायों के लिये प्राप्त n के मान

अधिशोष्य	अधिशोषक अवक्षेप			
(कार्बनिक अम्ल)	Fe_2O_3	Cr_2O_3	$BaSO_4$	Al_2O_3
टार्टरिक अम्ल	4	3	3	3
लैक्टिक अम्ल	3	3	3	3
सक्सिनिक अम्ल	3	2	2	2
फॉर्मिक अम्ल	2	2	2	2
थैलिक अम्ल	2	2	2	2

आँकड़ों से यह भी पता लगता है कि प्रायोगिक मानों का बीईटी-समीकरण द्वारा परिकलित मानों से उस अवस्था में अन्तर आ जाता है जब x का मान लगभग 0.5 से अधिक हो जाता है। इस अन्तर का कारण सम्भवतः उस कल्पना के अन्तर में निहित है जिस पर बीईटी-समीकरण की व्युत्पत्ति की गई है तथा प्रयोग में जो कुछ वास्तव में हो रहा है।

प्रथमतः बीईटी-समीकरण की व्युत्पत्ति गैसों के अधिशोषण के लिये की गई है। विलयनों से अधिशोषण के लिये अनुप्रयुक्त करते समय यह मान लिया गया है कि अधिशोषक की पृष्ठ पर केवल विलेय के अणुओं का अधिशोषण होता है। वस्तुतः, व्यावहारिक दृष्टि से यह भी सम्भव है कि अधिशोषक के पृष्ठ पर अधिशोषण के लिये विलेय तथा विलायक दोनों के अणुओं में प्रतिस्पर्धा होती हो। तनु विलयनों में, अर्थात्, जब x का मान 0.5 से कम होता है, केवल विलेय के अणुओं के अधिशोषण की कल्पना ठीक हो सकती है। उच्च सान्द्रताओं पर, जब x का मान 0.5 से अधिक होता है, हो सकता है उपर्युक्त कल्पना इतनी ठीक न हो, क्योंकि इसकी पर्याप्त सम्भावना है कि विलेय और विलायक दोनों के अणुओं में, अधिशोषक के पृष्ठ पर स्थान पाने के लिये, परस्पर स्पर्धा होती हो। विलेय के अणुओं के मूल्य पर यदि विलायक के अणु अधिशोषक के पृष्ठ पर अधिशोषित होने आरम्भ हो जाते हैं तो सान्द्र विलयन से अधिशोषण, जैसा कि सामान्यतः समझा जाता है, तनु विलयन से अधिशोषण की तुलना में, कम हो जायेगा तथा सान्द्रता बढ़ने पर अधिशोषण-वक्र गिरावट प्रदर्शित करेगा। बीईटी- समीकरण इस कारक पर विचार नहीं करता है तथा, इसीलिये, सान्द्र विलयनों में, बीईटी-समीकरण के द्वारा परिकलित अधिशोषित विलेय की मात्रा की, प्रयोग में प्रेक्षित मात्रा से, अधिक होने की सम्भावना है। प्रस्तुत अध्ययन में प्राप्त अधिकांश परिणाम इस तथ्य को भली-भाँति उजागर करते हैं।

यथार्थ अधिशोषण (प्रयोगात्मक v) तथा x के आलेख से प्राप्त वक्र की तुलना बीईटी-समीकरण केआधार पर अपेक्षित (सैद्धान्तिक) वक्र के साथ करने पर, बीईटी-समीकरण से अपसरण दो प्रकार

का दिखाई देता है। तनु विलयनों की तुलना में, सान्द्र विलयनों में, अधिशोषण-वक्र बीईटी-वक्र के ऊपर स्थित होगा, क्योंकि बीईटी-बक्र की व्युत्पत्ति अधिशोषण-परत में अणुओं की स्थिर संख्या की कल्पना पर आधृत है।

प्रयोगात्मक वक्रों की बीईटी-वक्रों के साथ तुलना करते समय, अधिशोषण-परत में अणुओं की संख्या के समस्त सान्द्रताओं पर स्थिर होने की सम्भावना को विचार में रखना चाहिये।

ऐसा दिखाई देता है कि यदि अधिशोषित पदार्थ अकार्बनिक है तो n का मान 1 होता है,[4,5–7] जबकि, यदि अधिशोषित पदार्थ कार्बनिक है तो n का मान 1 से अधिक होता है।[5,8–10]

यद्यपि तथा अकार्बनिक कार्बनिक योगिकों में विभाजक रेखा खींचना कठिन है, तथापि, इतना तो कहा ही जा सकता है कि अधिकांशतः अकार्बनिक यौगिकों का विलयनों में आयनीकरण होता है, जबकि अधिकांश कार्बनिक यौगिक विलयनों में आयनिक अवस्था में न होकर, अणुओं के रूप में होते हैं। अकार्बनिक विलयनों से पृष्ठ पर किसी अणु के अधिशोषित होने पर, और अधिशोषण रुक सकता है। अकार्बनिक विलयनों में पृष्ठ पर अधिशोषित अणु यदि ध्रुवीय यौगिक है तो नई-नई परतों के बनने की तब तक सम्भावना है जब तक कि अधिशोषित परतों के धारण की सीमा संतृप्ति तक न पहुँच जाय। इस प्रकार, यह सम्भव है कि कार्बनिक यौगिकों में अधिशोषण बहुपरतीय हो जबकि अकार्बनिक यौगिकों में अधिशोषण एकपरतीय ही हो।

सामान्यतः, यह कहा जा सकता है कि वह बीईटी-समीकरण जिसकी व्युत्पत्ति गैसों के अधिशोषण के लिये की गई है, उसको विलयनों के लिये अनुप्रयुक्त किया जा सकता है यदि अधिशोषित होने वाले अणु केवल विलेय के हैं। इन अवस्थाओं में बीईटी-समीकरण लागू होती है यदि संतृप्ति के लिये आवश्यक मान्द्रता c का मान ज्ञात हो।

विलयनों से अधिशोषण के लिये बीईटी-समीकरण की अनुप्रयोज्यता विलयनों से बहुपरतीय अधिशोषण की ओर इंगित करती है। बीईटी-समीकरण को कठोरता के साथ लागू करने के मार्ग में जो जटिलता आ सकती है वह है उक्त पृष्ठ पर अधिशोषण के लिये विलेय तथा विलायक के अणुओं की पारस्परिक स्पर्धा। उस अवस्था में जबकि अधिशोषण के दौरान, पृष्ठ पर पूर्व अधिशोषित विलेय के अणुओं को विलायक के अणु विस्थापित कर देते हैं, तब, अपेक्षित वक्र की तुलना में अधिशोषण-समतापी वक्र नीचे स्थित होगा। इसके विपरीत, पृष्ठ पर पूर्व अधिशोषित विलायक के अणुओं को यदि विलेय के अणु विस्थापित कर देते हैं तो, अपेक्षित वक्र की तुलना में, अधिशोषण-समतापी वक्र ऊपर स्थित होगा।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय डॉ० हीरा लाल निगम तथा डॉ० बेणी माधव शुक्ल से मिले समुचित परामर्श के लिये उनके अत्यन्त आभारी हैं।

निर्देश

1. ब्रुनोअर, एस०, एमेट, पी० एच० तथा टेलर, ई, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1938, **60**, 309.
2. शास्त्री, वी० आर०, ''पृष्ठ रसायन'', मध्य प्रदेश ग्रन्थ अकादमी, 1971, 71.
3. प्रसाद, जे० तथा प्रसाद, के०, **बोल० सोसा० किम०**, 1983, **49**, 172.
4. यूलर, एच० वी० तथा जिम्मरलुण्ड, जी०, **आर्किव० केमि० मिनरल जिओल०**, 1921 **8**, 23.
5. कोलथॉफ, आई० एम० तथा मोनेविन, डब्लू० एम० एम०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०** 1936, **58**, 1544.
6. कोडेल, एफ० ई०, वाइसबर्ग जे० तथा गिस्सर, एच०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1969, **91**, 7762.
7. रीगन, आर० एल०, क्वीसि, एस० तथा रियान, एम० डी०, **वही**, 1979, **101**, 7629
8. ऑस्ट्वाल्ड, डब्लू० तथा आइजाग्वीरे, आर० डीई, **कोलॉयड जीटश्रिफ्ट**, 1922, **30**, 299.
9. वारटेल, एफ० ई० तया स्लोन, सी० के०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1929, **51**, 1637.
10. बारटेल, एफ० ई०, शेफ्लर, जी० एच० तथा स्लोन, सी० के०, **वही**, 1931, **53**, 2501.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 31. No. 4, 1988

सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलनों वाले कुछ सान्त संकलन सूत्र

ओ० वी० सिंह तथा आर० सी० भट्ट

गणित तथा सांख्यिकी विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—जनवरी 2, 1987]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य संकलन सूत्र प्राप्त करके इससे दो प्रमेयों की स्थापना करना है।

Abstract

Some finite summation formulae involving generalized hypergeometric functions. *By* O. V. Singh and R. C. Bhatt, Department of Mathematics and Statistics, University of Jodhpur, Jodhdur.

The object of the present paper is to obtain a summation formula and to establish two theorems from it. In particular these yield many interesting summation formulae involving generalized hypergeometric functions of one and more variables.

1. प्रस्तावना तथा मुख्य परिणाम

इस प्रपत्र में हम अत्यन्त सामान्य प्रकृति का एक संकलन सूत्र प्राप्त करेंगे और इससे दो प्रमेयों की स्थापना करेंगे।

संकलन सूत्र (1.5) का मान ज्ञात करने के लिये हम निम्नलिखित परिणाम[7] का उपयोग करते हैं

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m L_m^{(\alpha)}(x)}{(n-m)!\,(1+\alpha)_m} = \frac{x^n}{n!\,(1+\alpha)_n} \tag{1.1}$$

जहाँ $L_m^{(\alpha)}(x)$ लागेर बहुपदियाँ हैं, जिन्हें

$$L_m^{(\alpha)}(x)=\frac{(1+\alpha)_m}{m!}\,{}_1F_1\,(-m;\,1+\alpha;\,x)$$

$$=\frac{(1+\alpha)_m}{m!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-k)_k\;x^k}{(1+\alpha)_k\,k!} \tag{1.2}$$

द्वारा परिभाषित करते हैं (तुलनात्मक [7, p. 200]) ।

अब हम निम्नलिखित पर विचार करते हैं

$$I=\int_0^\infty\int_0^\infty f(x+y)x^{a-1}\,y^{b-1}\,L_m^{(\alpha)}(xt)\,dx\,dy$$

$$R(a)>0,\;R(b)>0$$

(1.2) से $L^{(\alpha)}{}_m(xt)$ का प्रसारित रूप प्रयुक्त करते हुये तथा समाकल एवं संकलन का क्रम बदलने पर

$$I=\frac{(1+\alpha)_m}{m!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-m)_k\;t^k}{k!\;(1+\alpha)_k}\int_0^\infty\int_0^\infty f(x+y)\;x^{a+k-1}\;y^{b-1}\;dx\;dy$$

अब हम निम्नलिखित परिणाम[2] का प्रयोग करते हैं

$$\int_0^\infty\int_0^\infty f(x+y)\;y^{a-1}\;y^{b-1}\;dx\;dy=B(a,\,b)\int_0^\infty f(z)\;z^{a+b-1}\;dz$$

$$R(a)>0,\;Re(b)>0 \tag{1.3}$$

और तब थोड़े से परिगणन के बाद (1.4) को प्राप्त करते हैं ।

$$I=\int_0^\infty\int_0^\infty f(x+y)\;x^{a-1}\;b^{-1}\;L_m^{(\alpha)}\;(xt)\;dx\;dy$$

$$=B\,(a,b)\,\frac{(1+\alpha)_m}{m!}\int_0^\infty f(z)\;{}_2F_2\left(\begin{matrix}-m, & a; \\ 1+\alpha, & 1+b\end{matrix}\;zt\right)\,z^{a+b-1}\;dz. \tag{1.4}$$

(1.4) में $(-1)^m/\{(n-m)!\;(1+\alpha)_m\}$, से गुणा करने, फिर 0 से लेकर n तक m के लिये योग करने पर और (1.1) का प्रयोग करने पर हमें निम्नलिखित संकलन सूत्र प्राप्त होगा

$$\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m!\;(n-m)!}\int_0^\infty f(z)\;{}_2F_2\left(\begin{matrix}-m, & a; \\ 1+\alpha, & a+b;\end{matrix}\;zt\right)\,z^{a+b-1}\;dz$$

$$=\frac{(a)_n\;t^n}{(a+b)_n\;n!\;(1+\alpha)_n}\int_0^\infty f(z)\;z^{a+b+n-1}\;dz \tag{1.5}$$

जहाँ $Re(a+b)>0$ ।

संकलन सूत्र (1.5) समाकल (1.3) का उपयोग किये बिना भी प्राप्त किया जा सकता है । ऐसी दशा में हम (1.1) में $x=xzt$ लेते हैं, इसमें $x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ से गुणा करते हैं और x के लिये 0 से 1 तक समाकलन करते हैं । फिर प्राप्त परिणाम में $f(z)z^{a+b-1}$ से गुणा करने और z लिये 0 से ∞ तक समाकलन करने पर हमें तुरन्त परिणाम (1.5) प्राप्त होता है ।

अब यदि हम

(i) $f(z)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\Omega_k\frac{(zr)^k}{k!}\right)e^{-z};$

तथा

(ii) $f(z)=\left(\sum_{k,1=0}^{\infty}\Omega_{k,l},\delta_k\lambda_l\;\frac{(rz)^k\,(sz)^l}{k!\;l!}\right)e^{-z}$

लें तो हमें क्रमशः

$$\sum_{m-0}^{n}\frac{(-1)^m}{m!\,(n-m)!}\sum_{j,k=0}^{\infty}(a+b)_{j+k}\,\Omega_k\frac{(-m)_{jm}\,(a)_j\;tj\;r^k}{(1+a)_j\,(a+b)_j\,j!\,k!}$$

$$=\frac{(a)_n\,t^n}{n!\,(1+a)_n}\sum_{k=0}^{\infty}(a+b+n)_k\,\Omega_k\frac{r^k}{k!} \tag{1.6}$$

तथा

$$\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m\;(n-m!)}\sum_{j,k,l=1}^{\infty}(a+b)_{j+k+l}\,\Omega_{k,1}\,\delta_k\,\lambda_l$$

$$\cdot\frac{(-m)_j\,(a)_j}{(1+a)_j\,(a+b)_j}\;\frac{tj\;r^k\,s^l}{j!\;k!\;l!} \tag{1.7}$$

$$=(a)_n\,t^n/[n!\,(1+a)_n]\sum_{k,l=0}^{\infty}\Omega_{k,l}\,(a+b+n)_{k+l}\,\delta_k\,\lambda_l\frac{r^k\,s^t}{k!\;l!} \tag{1.8}$$

प्राप्त होंगे जहाँ $\{\Omega_{k,l}\}^{\infty}{}_{k,l=0}$ यादृच्छिक सम्मिश्र संख्याओं का अनुक्रम है और इसी तरह $\Omega_k,\delta_k,\lambda_l$ भी हैं ।

अब $1+a=a$ रखने तथा $(a+b)$ के स्थान पर a लिखने तथा t, r, s को x, y, z; द्वारा प्रतिस्थापित करने पर हम निम्नलिखित प्रमेयों को स्थापित करते हैं ।

प्रमेय I

$$\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m!\,(m-n)!}\sum_{j,k=0}^{\infty}(a)_{j+k}\,\frac{(-m)j}{(a)_j}\,\Omega_k\frac{xj\;y^k}{j!'k}$$

$$=\frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}(a+n)_k\,\Omega_k\,\frac{y^k}{k!} \tag{1.9}$$

प्रमेय II

$$\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m!\,(n-m)!}\sum_{j,k,l=0}^{\infty}(a)_{j+k+l}\,\Omega_{k,l}\,\frac{(-m)}{(a)_j}\,\delta_k\,\lambda_l\,\frac{x^j\,y^k\,z^1}{j!\,k!\,l!}$$

$$=\frac{x^n}{n!}\sum_{k,1=0}^{\infty}(a+n)_{k+l}\,\Omega_{k,l}\,\delta_k\,\lambda_l\,\frac{y^k\,z^l}{k!\,l!} \tag{1.10}$$

जहाँ $\Omega_{l,k}$ इत्यादि संकेत (1.9) में परिभाषित हैं।

2. विशिष्ट दशायें

इन अनुभाग में हम संकलन सूत्र (1.5) की विशिष्ट दशाओं-प्रमेय I तथा प्रमेय II-पर विचार करेंगे।

(a) (1.5) में $f(z)=e^{-z}$, $t=(1-x)/2$, $a=1+a+\beta$ रखने पर

$$\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{(n-m)!\,(1+a)_m}\,P_m^{(\alpha,\beta-m)}(x)=\frac{(1+a+\beta)_n\,(1-x)^n}{n!\,2^n\,(1+a)_n} \tag{2.1}$$

जहाँ $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ जैकोबी बहुपद है जिसे

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(1+a)_n}{n!}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n,\ 1+a+\beta+n;\\ 1+a;\end{matrix}\ (1-x)/2\right) \tag{2.2}$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है (तुलनार्थ[7])।

यहाँ पर (2.1) मुनोत द्वारा प्राप्त परिणाम है।[6]

(b) (1.9) में

(i) $\Omega_k=(b)_k/(c)_k$ (ii) $\Omega_k=1t(c)_k$ रखने पर हमें क्रमशः

$$\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{m!\,(n-m)!}\;F_2\,(a,\,-m,\,b;\,a,\,c;\,x,\,y)$$

$$=\frac{x^n}{n!}\,{}_2F_1\,(a+n,\,b;\,c;\,y) \tag{2.3}$$

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!\,(n-m)!} \Psi_1 (a, -m, a, c; x, y)$$

$$=\frac{x^n}{n!}\ {}_1F_1\ (a+n; c; y) \tag{2.4}$$

प्राप्त होता है जहाँ $F_2(x, y)$ द्वितीय प्रकार का ऐपेल का द्विगुण हाइपरज्यामितीय फलन है जिसे निम्न-वत् परिभाषित किया जाता है

$$F_2 (a, b, b'; c, c'; x, y)$$

$$=\sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{(a)_{r+s}\,(b)_r\,(b')_s\,x^r\,y^s}{(c)_r\,(c')_s\,r!\,s!} \tag{2.5}$$

$$|x|+|y|<1$$

तथा $\psi_1\ (x, y)$ दो चरों में 20 संगामी श्रेणियों में से एक है जिसे

$$\psi_1\ (a, b, c, c'; x, y)=\sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{(a)_{r+s}\,(b)_r\,x^r\,y^s}{(c)_r\,(c')_s\,r!\,s!} \tag{2.6}$$

$$|x|<1$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है।[3]

(2.3) में x के स्थान पर t, a के स्थान पर $1+\alpha+\beta$, c के स्थान पर $1+\alpha$, b के स्थान पर $-n$ रखने और तब n के लिये 0 से ∞ तक संकलित करने पर हमें जैकोबी बहुपदों के लिये निम्न-लिखित जनक फलन प्राप्त होते हैं

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}\ (1-2y)\ (1+\alpha)_n^{-1}\ t^n=\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{n!\ m!}$$

$$F_2\ (1+\alpha+\beta, -m, -n; 1+\alpha+\beta, 1+\alpha; t, y) \tag{2.7}$$

(c) (1.10) में

(i) $\Omega_{k,l}=1,\ \delta_k=(b)_k/(b')_k,\ \lambda_l=(c)_l/(c')_l$

(ii) $\Omega_{k,l}=1,\ \delta_k=(b)_k/(b')_k,\ \lambda_l=1/(c')_l$

(iii) $\Omega_{k,l}=(b_2)_{k+l};\ \delta_k=1/(c_2)_k;\ \lambda_l=1/(c_3)_l$

(iv) $\Omega_{k,l}=1/(c_2)_{k+l};\ \delta_k=(b_2)_k;\ \lambda_l=(b_3)_l$

रखने पर हमें क्रमश:

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)}{m!\,(n-m)!} F_A\,(a,\,-m,\,b,\,c;\,a,\,b',\,c';\,x,\,y,\,z)$$

$$=(x^n/n!)\,F_2\,(a+n,\,b,\,c;\,b',\,c';\,y,\,z) \tag{2.8}$$

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!\,(n-m)}\;{}_3\phi_A\,(1)\,(a,\,-m,\,b;\,a,\,b',\,c';\,x,\,y,\,z)$$

$$=(x^n/n!)\,\psi_1\,(a+n,\,b;\,b',\,c';\,y,\,z) \tag{2.9}$$

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!\,(n-m)!} F_E\,(a,\,a,\,a,\,-m,\,b_2,\,b_2;\,a,\,c_2,\,c_3;\,y,\,z)$$

$$=(x^n/x!)\,F_4\,(a+n,\,b_2;\,c_2,\,c_3;\,y,z) \tag{2.10}$$

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!\,(n-m)!} F_G\,(a,\,a,\,a,\,-m,\,b_2,\,b_2;\,a,\,c_2,\,c_2;\,x,\,y\,z)$$

$$=(x^n/n!)\,F_1\,(a+n,\,b_2,\,b_3:\,c_3:\,y,\,z) \tag{2.11}$$

प्राप्त होते हैं जहाँ $F_A\,(x, y, z)$ प्रथम कोटि का लारिसेला का त्रिगुण हाइपरज्यामितीय फलन है जिसे

$$F_A\,(a,\,b_1,\,b_2,\,b_3;\,c_1,\,c_2,\,c_3;\,x,\,y,\,z)$$

$$=\sum_{r,s,t=0}^{\infty} \frac{(a)_{r+s+t}\,(b_1)_r\,(b_2)_s\,(b_3)_t}{(c_1)_c\,(c_2)_s\,(c_3)_t}\,\frac{x^r\,y^s\,z^t}{r!\,s!\,t!} \tag{2.12}$$

$$|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|<1$$

के द्वारा परिभाषित किया जाता। सरन द्वारा प्राप्त[3] $F_E(x, y, z)$ तथा $F_G(x, y, z)$ त्रिगुण हाइपरज्यामितीय फलन हैं और

$$F_E\,(a,\,a,\,a,\,b_1,\,b_2,\,b_2;\,c_1,\,c_2,\,c_3;\,x,\,y,\,z)$$

$$=\sum_{r,s,t=0}^{\infty} \frac{(a)_{r+s+t}\,(b_1)_r\,(b_2)_{st}\,x^r\,y^s\,z^t}{(c_1)_r\,(c_2)_s\,(c_3)_t\,r!\,s!\,t!} \tag{2.13}$$

के द्वारा परिभाषित किये जाते हैं जहाँ अभिसरण के लिये

$$R+(\sqrt{S}+\sqrt{T})^2=1;\ |x|<R,\ |y|<S|z|<T$$

$$F_G\,(a, b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_2; x, y, z)$$

$$=\sum_{r,s,t=0}^{\infty}\frac{(a)_{r+s+t}\,(b_1)_r\,(b_2)_s\,(b_3)_t\,x^r\,y^s z^t}{(c_1)_r\,(c_2)_{s+t}\,r!\,s!\,t!} \tag{2.14}$$

जहाँ अभिसरण के लिये

$$R+S=1=RT;\ |x|<R,\ |y|<S,\ |z|<T.{}_3\phi_A^{(1)}\,(x, y, z)$$

तीन चरों वाला संगामी हाइपरज्यामितीय फलन है (जैन)[4] और

$${}_3\phi_A^{(1)}\,(a, b_1, b_2; c_1, c_2, c_3; x, y, z)$$

$$=\sum_{r,r,t=0}^{\infty}\frac{(a)_{r+s+s}\,(b_1)_r\,(b_2)_s\,x^r\,y^s\,z^t}{(c_1)_r\,(c_2)_s\,(c_3)_t\,r!\,s!\,t!};\ |x|<1 \tag{2.15}$$

के द्वारा परिभाषित किया जाता है।

F_1 तथा F_4 प्रथम तथा चतुर्थ प्रकार के ऐपेल के द्विगुण हाइपरज्यामितीय फलन हैं जिन्हें क्रमशः

$$F_1\,(a, b, b'; c; x, y)=\sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{(a)_{r+s}\,(b)_r\,(b')_s\,x^r\,y^s}{(c)_{r+s}\,r!\,s!} \tag{2.16}$$

$$|x|<1\ \ |y|<1$$

एवं

$$F_4\,(a, b; c, c'; x, y)=\sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{(a)_{r+s}\,(b)_{r+s}\,x^r\,y^s}{(c)_r\,(c')_s\,r!\,s!} \tag{2.17}$$

$$|\sqrt{x}|+|\sqrt{y}|<1$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकगण प्रो० आर० के० सक्सेना, अध्यक्ष गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय के प्रति आभार व्यक्त करते हैं जिन्होंने न केवल प्रोत्साहित किया अपितु विभागीय सुविधायें प्रदान कीं।

निर्देश

1. एपेल, पी० तथा कैम्पे द फेरी, जे०, Fonctions hppergcometriques et hyperspheriques Polynomes D' Hermite, गाथियर-विलर्स, पेरिस, 1926.

2. एडवर्ड्स, के०, A Treatise on Integral Calculus, चेल्सिया, न्यूयार्क 1954.

3. एर्डेल्यी, ए०, मैग्नस, डब्लू०, ओवर हिटिंगर, एफ० तथा ट्रिकोमी, एफ० जी०, Higher Transcendental Functions. भाग I, मैकग्राहिल, न्यूयार्क, 1953.

4. जैन, आर० एन०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस इंडिया**, 1966, **36**, 395-408.

5. लारिसेला, जी० Rend. Circ. Mat. Palermo, 1893, **7**, 111-158.

6. मुनोत, पी० सी०, Proc. Cambridge Phil. Soc., 1966, **65**, 691-695.

7. रेनविले, ई० डी०, Special Functions, मैकमिलन, न्यूयार्क, 1960.

8. सरन, एस०, **गणित**, 1954, **5** (2).

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 31, No. 4, 1988

उष्मा समीकरण से सम्बद्ध समाकल समीकरण

आर० के० अग्रवाल तथा बी० के० जोशी

गणित विभाग, शासकीय इंजीनियरिंग कालेज, बिलासपुर (म० प्र०)

[प्राप्त—अगस्त 15, 1987]

सारांश

श्रेणी-प्रसार की कल्पना करते हुये एक समाकल समीकरण का हल दो विभिन्न दशाओं के लिये प्रस्तुत किया गया है। प्रयुक्त अष्टियाँ क्रमशः उष्मा समीकरण तथा सार्वीकृत उष्मा समीकरण की हल हैं।

Abstract

An integral equation related to heat equation. *By* R. K. Agrawal and B. K. Joshi, Department of Mathematics, Government Engineering College, Bilaspur (M. P.).

Assuming the series expansion, the solution of an integral equation has been presented for two different cases. The kernels used are the solutions of heat equation and generalised heat equation respectively.

1. आंशिक समाकल समीकरण

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$$

का मूलभूत हल

$$4(r, t)=(4\pi t)^{-1/2} \exp\left(\frac{-r^2}{4t}\right), t>0 \tag{1.1}$$

द्वारा प्रस्तुत किया जाता है।

बिडर ने[1–3] उष्मा रूपान्तर

$$f(t)=2\int_{0}^{\infty} K(r,t)\, \phi(r)\, dr \tag{1.2}$$

का सूत्रपात किया जिसमें अष्टि (r, t) को (1.1) द्वारा व्यक्त किया जाता है। यह मान कर कि (1.2) का वाम पक्ष घात श्रेणी के रूप में प्रसार किया जा सकता है उसने (1.2) के लिये निम्नलिखित विलोमन की स्थापना की

$$\phi\sqrt{((4r))}=\sqrt{(\pi)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k\, r^{k+\alpha}}{\sqrt{(K+\alpha+\frac{1}{2})}}$$

यहाँ हम (1.1) के हल निकालेंगे जबकि फलन $f(t)$ के लिये निश्चित प्रकार का श्रेणी प्रसार ज्ञात हो। विडर द्वारा प्रस्तुत किया गया हल[8] विशिष्ट दशा के रूप में प्राप्त होता है।

आंशिक अवकल समीकरण

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\beta u}{t} \tag{1.3}$$

के हल को निम्नवत् लिखा जा सकता है

$$4(r, t)=(4\pi t)^{-1/2}\, t^{-\beta}\exp\left(\frac{-r^2}{4t}\right) \tag{1.4}$$

समाकल समीकरण (1.2) की अष्टि के रूप में (1.4) का उपयोग करने पर हम विलोमन प्रमेयों की स्थापना करते हैं।

2. प्रमेय I

यदि $f(t)$ का प्रसार घात श्रेणी

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, t^{k+\alpha} \tag{2.1}$$

में किया जा सके तो समाकल समीकरण (1.2) का हल होगा

$$\phi(r)=\sqrt{(\pi)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k\, r^{2k+2\alpha+2\beta}}{4^{k+\alpha+\beta}\sqrt{((k+\alpha+\beta+\frac{1}{2}))}} \tag{2.2}$$

जहाँ $k(r, t)$ को (1.4) द्वारा सूचित किया जाता है।

उपपत्ति

(1.2) के दक्षिण पक्ष में (2.2) का मान रखने तथा समाकलन एवं संकलन का क्रम बदलने पर

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k\, t^{k+\alpha}}{\sqrt{(k+\alpha+\beta+\frac{1}{2})}}\int_0^{\infty}\exp(-y)\, y^{k+\alpha+\beta-1/2}\, dy$$

यदि हम गामा फलन की सहायता से तथा (2.1) के प्रयोग से समाकल का मान ज्ञात करें तो (1.2) का वाम पक्ष प्राप्त होता है।

इससे प्रमेय की स्थापना हो जाती है।

विशिष्ट दशा

यदि $\beta=0$ तो अष्टि (1.4) विडर[3] के परिणाम में समानीत हो जाती है और इस तरह विशिष्ट दशा बन जाती है।

प्रमेय II

यदि $f(t)$ का प्रसार निम्नवत् घात श्रेणी

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \sqrt{((k+\beta+\frac{1}{2}))}}{\sqrt{(k+a+\frac{1}{2})}}\, t^k \tag{2.3}$$

में किया जा सके तो समाकल समीकरण (1.2) का हल होगा

$$\phi(r)=\sqrt{(\pi)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k\, r^{2k+2\beta}}{4^{k+\beta}\sqrt{(k+a+\frac{1}{2})}} \tag{2.4}$$

जहाँ अष्टि $k(r, t)$ को (1.4) द्वारा व्यक्त किया जाता है।

इसे प्रमेय I की तरह से भी सिद्ध किया जा सकता है।

विशिष्ट दशा

यदि $\beta=0$ हो तो इस प्रमेय से विडर द्वारा प्रदत्त[3] समाकल समीकरण तथा उसका हल प्राप्त होता है।

निर्देश

1. विडर, डी० वी०, Annali di Matematica, 1956, **42**, 279-305.
2. वही, J. Australian Math. Soc., 1964, **4**, 1-14.
3. वही, J. D. Analyse Mathematique, 1967, **18**, 389-413.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 31. No. 4, 1988

द्विदूरीक समष्टि में स्थिर बिन्दु प्रमेय

राजेश कुमार पाण्डेय

गणित विभाग, शासकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय, नरसिंहपुर (म० प्र०)

[प्राप्त—जनवरी 6, 1988]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में ऐसे स्थिर बिन्दु प्रमेय की स्थापना की गई है जो माइया तथा इसेकी के प्रमेयों का सार्वीकरण करता है।

Abstract

Common fixed point theorems in bimetric space. *By* Rajesh Kumar Pande, Department of Mathematics, Government P. G. College, Narsinghpur (M. P.).

In this paper we shall prove a fixed point theorem which generalizes the theorems due to Miaia and Iseki.

माइया[3] ने निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है।

प्रमेय 1

माना कि X दूरीक समष्टि है जिसके दो दूरीक d तथा δ ऐसे हैं कि

(i) $d(x, y) \leqslant \delta(x, y)$, X में समस्त x, y के लिये

(ii) X पूर्ण है d के प्रति

(iii) $T : X \rightarrow X$ संतत प्रतिचित्रण (mapping) है d के प्रति

जिससे $\delta(Tx, Ty) \leqslant k|\delta(x, y)$, X में समस्त x, y की तुष्टि होती है जहाँ $0 \leqslant k < 1$, तब x में T का अद्वितीय स्थिर बिन्दु विद्यमान होता है।

तत्पश्चात् इसेकी[1] ने माइया के परिणाम का सार्वीकरण करते हुये निम्नलिखित **प्रमेय की** स्थापना की ।

प्रमेय 2

माना कि x एक दूरीक समष्टि (metric space) है जिसके दो दूरीक d तथा δ ऐसे हैं कि

(i) $d(x, y) \leqslant \delta(x, y)$, X में समस्त x, y के लिये

(ii) X पूर्ण हैं d के प्रति

(iii) दो प्रतिचित्रण (mapping) $f, g : X \to X$ संतत हैं d के प्रति तथा

$$\delta(f(x), g(y)) \leqslant a_1\delta(x, y) + a_2\{\delta(x, f(x) + \delta(y, g(y))\} + a_3\{\delta(x, g(y)) + \delta(y, f(x)\}$$

X में प्रत्येक x, y के लिये जहाँ a_1, a_2 तथा a_3 अनृण हैं और $a_1 + 2a_2 + 2a_3 < 1$ तब f तथा g में अद्वितीय सार्व स्थिर बिन्दु होता है ।

प्रस्तुत प्रपत्र में हम ऐसे स्थिर बिन्दु प्रमेय की स्थापना करेंगे जो उपर्युक्त प्रमेयों का सार्वीकरण करती है ।

प्रमेय 3

माना कि X एक दूरीक समष्टि है जिसके दो दूरीक d तथा δ ऐसे हैं कि निम्नलिखित प्रतिबन्ध लागू होते हैं

(i) $d(x, y) \leqslant \delta(x, y)$, X में समस्त x, y के लिये

(ii) X पूर्ण हैं d के प्रति

(iii) दो प्रतिचित्रण $f, g : X \to X$ संतत हैं d के प्रति तथा

$$\delta(f(x), g(y)) \leqslant a_1\delta(x, y) + a_2\{\delta(x, f(x)) + \delta(y, g(x))\} + a_3\{\delta(x, g(y)) + \delta(y, f(x))\} + a_4\left\{\frac{\delta(x, f(x))\delta(y, g(y))}{\delta(x, y)} + \frac{\delta(x, f(x))\delta(y, g(y))}{\delta(f(x), g(y))}\right\} \quad \text{(A)}$$

X में समस्त x, y के लिये तुष्ट करते हैं जहाँ a_1, a_2, a_3 तथा a_4 इस तरह अनृण हैं कि $a_1 + 2a_2 + 2a_2 + 2a_4 < 1$ तब f तथा g का X में एक अद्वितीय सार्व स्थिर बिन्दु होता है ।

उपपत्ति

माना कि X में x_0 यादृच्छिक है और परिभाषित अनुक्रम $\{x_n\}$

$$x_1=f(x_0),\ x_2=g(x_1),\ \ldots\ldots\ldots$$

के रूप में है अर्थात्

$$x_{2n+1}=f(x_{2n}),\ x_{2n+2}=g(x_{2n+1}),\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ldots$$

तब प्रतिबध (A) के द्वारा

$$\delta(x_1, x_2)=\delta(f(x_0), g(x_1))$$
$$\leqslant a_1\delta(x_0, x_1)+a_3\{\delta(x_0, x_1)+\delta(x_1, x_2)\}$$
$$+a_3\{\delta(x_0, x_2)+\delta(x_1, x_1)\}$$
$$+a_4\left\{\frac{\delta(x_0, x_1)\delta(x_1, x_2)}{\delta(x_0, x_1)}+\frac{\delta(x_0, x_1)\delta(x_1, x_2)}{\delta(x_1, x_2)}\right\}$$

अत:

$$\delta(x_1, x_2)\leqslant\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{1-a_2-a_3-a_4}\,\delta(x_0, x_1)$$

$$=h\delta(x_0, x_1),$$

जहाँ

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{1-a_2-a_3-a_4}=h<1.$$

सामान्यत:

$$\delta(x_n.\ x_{n+1})\leqslant h^n\delta(x_0, x_1)$$

यदि $$m>n,\ \delta(x_n, x_m)\leqslant\frac{h^n}{1-h}\,\delta(x_0, x_1)$$

इससे पता चलता है कि $\{x_n\}$ कौशी अनुक्रम है δ के प्रति।

चूंकि $d(x, y)\leqslant(x, y)$ X में समस्त x, y के लिये अत: $\{x_n\}$ कौशी अनुक्रम है d के प्रति। चूंकि X प्रतिबन्ध (ii) के अन्तर्गत दूरीक d के प्रति पूर्ण है अत: $\{x_n\}$ का एक सीमा बिन्दु u होता है X में अर्थात्

$$\lim_{n\to\infty}(x_{2n})=u.$$

दूरीक d के प्रति f के सांतत्य से हमें प्राप्त होता है कि

$$f(u)=f\lim_{n\to\infty}(x_{2n})=\lim_{n\to\infty}(fx_{2n})=x_{2n+1}=u,$$

अत: u स्थिर बिन्दु है f का X में।

इसी तरह g के सांतत्य में यह दिखलाया जा सकता है कि $g(u)=u$ अतएव u सार्व स्थिर बिन्दु f तथा g का।

माना कि u तथा v दो स्पष्ट सार्व स्थिर बिन्दु हैं f तथा g के तो

$$\delta(u, v)=\delta(f(u). g(v))$$
$$\leqslant a_1\delta(u, v)+a_2\{\delta(u, f(u))+\delta(v, g(v))\}$$
$$+a_3\{\delta(u, g(v))+\delta(v, f(u))\}$$
$$+a_4\left\{\frac{\delta(u, f(u))\delta(v, g(v))}{\delta(u, v)}+\frac{\delta(u, f(u))\delta(v, g(v))}{\delta(f(u)), g(v))}\right\}$$
$$\leqslant(2a_3+a_1)\delta(u, v)$$

जो विरोधाभास है क्योंकि

$$2a_3+a_1\leqslant a_1+2a_2+2a_3+2a_4<1$$

अतः f तथा g का अद्वितीय स्थिर बिन्दु होता है।

टिप्पणियाँ

1. $a_2=a_3=a_4=0$ एवं $f(x)=g(x)$ लेने पर हमें प्रमेय 1 प्राप्त होता है।

2. $a_4=0$ लेने पर हमें प्रमेय 2 प्रात्त होता है।

प्रमेय 4

माना कि X एक दूरीक समष्टि है जिसके दो दूरीक d तथा δ हैं तथा $T_i(i=1, 2, \ldots\ldots\ldots k)$ X के संतत प्रति चित्रणों का सान्त परिवार है।

माना कि

(i) $d(x, y)\leqslant\delta(x, y)$, समस्त $x, y\in X$, के लिये

(ii) X पूर्ण है d के प्रति

(iii) $T_iT_j=T_jT_i(i, j=1,2, \ldots\ldots\ldots, k)$

(iv) धन पूर्णांकों की दो प्रणालियाँ हैं

$$(m_1, m_2, \ldots\ldots\ldots, m_k) \text{ तथा } (n_1\ n_2\ \ldots\ldots\ldots, n_k)$$

ऐसी हैं कि X में x, y के लिये

$$\delta(T_1^{m_1} T_2^{m_2} \ldots\ldots\ldots T_k^{m_k}(x), T_1^{n_1} T_2^{n_2} \ldots\ldots\ldots T_k^{n_k}(y))$$

$$\leqslant a_1\delta(x, y) + a_2\{\delta(x, T_1^{m_1} T_2^{m_2} \ldots\ldots\ldots T_k^{m_k}(x))$$

$$+\delta(y, T_1^{m_1} T_2^{n_2} \ldots\ldots\ldots T_k^{n_k}(y)\}$$

$$+ a_3\{\delta(x, T_1^{n_1} T_2^{n_2} \ldots\ldots\ldots T_k^{n_k}(y))$$

$$+ \delta(y, T_1^{m_1} T_2^{m_2} \ldots\ldots\ldots T_k^{m_k}(x))\}$$

$$+a_4\left\{\frac{\delta(x, T_1^{m_1} T_2^{m_2} \ldots\ldots\ldots T_k^{m_k}(x))\delta(y, T_1^{n_1} T_2^{n_2} \ldots\ldots\ldots T_k^{n_k}(y))}{\delta(x, y)}\right.$$

$$\left.+\frac{\delta(x, T_1^{m_1} T_2^{m_2} \ldots\ldots\ldots T_k^{m_k}(x))\delta(y, T_1^{n_1} T_2^{n_2} \ldots\ldots\ldots T_k^{n_k}(y))}{\delta(T_1^{m_1} T_2^{m_2} \ldots\ldots\ldots T_k^{m_k}(x)), T_1^{n_1} T_2^{n_2} \ldots\ldots\ldots T_k^{n_k}(x))}\right\}$$

जहाँ a_1, a_2, a_3 तथा a_4 अनृण हैं जिससे कि $a_1+2a_2+2a_3+2a_4<1$.

तब $T_i(i=1, 2, \ldots, k)$ का एक अद्वितीय सार्व स्थिर बिन्दु होता है ।

उपपत्ति

माना कि

$$f=T_1^{m_1} T_2^{m_2} \ldots\ldots\ldots T_k^{m_k},$$

$$g= T_1^{n_1} T_2^{n_2} \ldots\ldots\ldots T_k^{n_k}$$

तो f तथा g संतत हैं और प्रतिबन्ध (A) की तुष्टि करते हैं अतएव प्रमेय के अनुसार f, g का x में एक अद्वितीय सार्व स्थिर बिन्दु u होता है अत:

$$f(u)=g(u)=u$$

तो प्रत्येक i के लिये

$$T_i(f(u))=T_i(g)(u))=T_i(u).$$

प्रतिबन्ध (iii) के अनुसार

$$f(T_i(u))=g(T_i(u))=T_i(u).$$

अत: $T_i(u)(i=1, 2, \ldots\ldots\ldots, k)$

सार्व स्थिर बिन्दु है f तथा g का। f तथा g के सार्व स्थिर बिन्दु की अद्वितीयता से हमें

$$T_i(u)=u(i=1, 2, \ldots\ldots\ldots k)$$

प्राप्त होता है। इस तरह प्रमेय की उपपत्ति पूरी हो जाती है।

निर्देश

1. इसेकी, के०, Rend. Sem. Mat. Universita dipadova, 1975, **53**, 13-14.
2. इस्त्रातेस्कु, वी० आई०, Introducex in teoria punctelor fixe. बुखारेस्ट, 1973.
3. माइया, एम० जी०, Rend. Sem. Mat. Universita dipadova, 1968, **40**, 139-143.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 31, No. 4, 1988

शर्कराओं के अजीवात्‌जनन पर विभिन्न प्रकार के विकिरणों का प्रभाव

के० बहादुर, एस० रंगनायकी, एस० कुमार तथा शैलजीत सिंह
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—मार्च 29, 1988]

सारांश

अमोनियम मालिब्डेट, डाइ अमोनियम हाइड्रोजन फास्फेट, जैव खनिज तथा फार्मैल्डीहाइड के मिश्रण को पराबैंगनी प्रकाश, सूर्य प्रकाश, विद्युत लैम्प, विसरित प्रकाश में उद्‌भासित करने पर तथा अंधकार में रखे कन्ट्रोल में शर्कराओं का निर्माण देखा गया। विभिन्न प्रकाश स्रोतों से सर्वाधिक शर्कराओं का निर्माण विभिन्न अवधियों में देखा गया। अंधकार में रंचमात्र शर्कराओं का निर्माण हुआ।

Abstract

Effect of different sources of radiation on the abiogenesis of sugars. *By* K. Bahadur, S. Ranganyaki, S. Kumar and Shail Jeet Singh, Department of Chemistry, University of Allahabad.

Formation of sugar was observed in aqueous mixtures containing ammonium molybdate, diammonium hydrogen phosphate, biological minerals and formaldehyde on exposure to clinical ultraviolet light, sunlight, electric lamp, diffused light and in the control mixture kept in dark. Clinical u. v. radiation obtained from mercury diffusion lamp (365nm) showed maximum formation of sugars after 40 min. of exposure. Sun-light gave optimum sugar formation after 2 days of exposure, and electric light from 1000 watt tungsten bulb gave optimum sugar formation on 4th day exposure. A little formation of sugars also took place by ionic reaction taking place in dark.

जैव यौगिकों के अजीवात्‌जनन के लिये उपयुक्त ऊर्जा स्रोत पर बल दिया गया है।[1] पोनाम्पेरूमा[2] ने शर्कराओं के अजीवात्‌जनन के लिये पराबैंगनी प्रकाश का प्रयोग किया है। इसी तरह विद्युतविसर्जन[3] एवं फार्मैल्डीहाइड की उपस्थिति में दृश्य प्रकाश आदि को व्यवहृत किया गया है।[4–10]

प्रस्तुत प्रपत्र में शर्कराओं के अजीवात्जनन पर विकिरण के प्रभाव का अध्ययन किया गया है।

प्रयोगात्मक

पाँच मिश्रणों का एक तैयार किया गया जिनमें से प्रत्येक में निम्नलिखित घटक थे

अमोनियम माब्लिडेट	8 ग्राम
डाइअमोनियम हाइड्रोजन फास्फेट	18 ग्राम
सोडियम क्लोराइड	3 ग्राम
कैल्सियम ऐसीटेट	0.5 ग्राम
मैग्नीशियम सल्फेट	0.5 ग्राम
पोटैशियम सल्फेट	0.5 ग्राम

इन घटकों को 250 मिली० के शंक्कावार फ्लास्कों में लेकर 20 मिली० जल के साथ उबाला गया और तब तक बूंद बूंद करके सान्द्र HCl मिलाया गया जब तक विलयन स्वच्छ न हो जाय। विलयन का आयतन आसुत जल से 75 मिली कर लिया गया। फ्लास्कों को रुई की ढाठ से बन्द करके आधे घन्टे तक 15 पौंड दाब पर आटोक्टलेवमें निर्जमित किया गया। फ्लास्कों को ठंडा करने के बाद 36% फार्मेल्डीहाइड का 75 मिली० मिलाया गया और मिश्रण को क्वार्ट्ज के बने शंक्वाकार फ्लास्क में परा-बैंगनी प्रकाश में उद्भासित किया गया।

इस तरह के पाँच मिश्रणों में से चार को विभिन्न विकिरण स्रोतों में उद्भासित किया गया। ये हैं

(i) पराबैंगनी प्रकाश (ii) सूर्य प्रकाश

(iii) विद्युत बल्ब 1000 वाट (iv) विसरित प्रकाश

पाँचवें मिश्रण को नियन्त्रण के रूप में अंधकार में रखा गया।

पराबैंगनी प्रकाश में उद्भासित मिश्रण में शर्कराओं की पहचान 1, 5, 10, 20, 40, 60, 120 मिनट बाद की गई। अंधकार में अन्य विकिरण स्रोतों में रखे मिश्रणों में शर्कराओं की पहचान 2, 4, तथा 8 दिन बाद की गई।

इन मिश्रणों में शर्करा की पहचान एकविमीय तथा द्विविमीय पत्र-क्रोमेटेग्राफी द्वारा की गई। शेष विधि पूर्णवर्णित विधि के अनुसार है। [12]

शर्कराओं का मात्रात्मक निश्चयन फीनाल तथा सल्फ्यूरिक अम्ल द्वारा सम्पन्न हुआ[10]।

परिणाम तथा विवेचना

विभिन्न विकिरण स्रोतों में उद्भासित मिश्रणों में जिन शर्कराओं की पहचान की गई वे सारणी 1 में अंकित है

सारणी 1

परावैंगनी प्रकाश में उदभासित शर्कराओं के मिश्रण का विश्लेषण

उदभासन की अवधि	पहचानी गई शर्करायें	निर्मित शर्करा की मात्रा (मिग्रा०/मिली० ग्लुकोस के रूप में)
1	गैलैक्टोस, राइबोस	1.8
5	गैलैक्टोस, राइबोस	3.8
10	फ्रुक्टोस, सुक्रोस	4.8
20	फ्रुक्टोस, राइबोस	6.0
40	ग्लुकोस, फ्रुक्टोस	6.4
60	फ्रुक्टोस, गैलैक्टोस	4.8
120	फ्रुक्टोस	4.4

परावैंगनी प्रकाश में उद्भासित मिश्रण में शर्कराओं का निर्माण तुरन्त प्रारम्भ हो गया। 40 मिनट के बाद शर्कराओं की सर्वाधिक मात्रा पाई गयी। इसके बाद शर्करा की मात्रा घटने लगी।

सभी विकिरण स्रोतों में उद्भासित मिश्रणों में शर्करा का निर्माण देखा गया। यहाँ तक कि अंधकार में रखे नियन्त्रण मिश्रण में रंचमात्रा में शर्करायें बनीं। सूर्य प्रकाश में 2 दिन बाद सर्वाधिक शर्करा बनी, जिसके बाद मात्रा घटती गई किन्तु विसरित प्रकाश में यह मात्रा बढ़ती रही। विद्युत बल्व में उद्भासन से भी ऐसे ही परिणाम प्राप्त हुये।

सारणी 2

विभिन्न विकिरण स्रोतों में रखी शर्कराओं का विश्लेषण

(प्रकाश तथा अंधकार में 2, 4 तथा 8 दिन उद्‌भासन काल के बाद)

विकिरण स्रोत	उद्‌भासन अवधि (दिन)	पहचानी गई शर्करायें	शर्करा की (mg/ml.)
सूर्य प्रकाश	2	गैलैक्टोस, राइबोस फ्रुक्टोस	7.4
	4	फ्रक्टोस, राइबोस, डिआक्सीराइबोस	6.8
	8	राइबोस, फ्रक्टोस	4.8
विद्युत लैम्प	2	फ्रक्टोस, डिआक्सीराइबोस	6.0
	4	फ्रक्टोस, डिआक्सीराइबोस	6.4
	8	फ्रक्टोस, ग्लैक्टोस	6.4
विसरित प्रकाश	2	फ्रक्टोस, सुक्रोस	4.6
	4	फ्रक्टोस, राइबोस	4.8
	8	फ्रक्टोस, राइबोस	7.2
अंधकार	2	फार्मोस	0.5
	4	फार्मोस	0.5
	8	फार्मोस	0.5

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकों में से एक (शैलजीत सिंह) सी० एस० आई० आर० नई दिल्ली से प्राप्त होने वाली आर्थिक सहायता के लिये कृतज्ञता व्यक्त करता है।

निर्देश

1. हल, डी० ई०, **Nature, 1960 196,** 693.
2. पेनाम्पेरूमा, सी० तथा मैरिनर, आर०, 19th Proc. Inter Cong. Pure Appl. Chem Lond 1963.
3. लोयेब, डब्ल्यू, Ber, Dtsch. Chem. Ges. 1913, **46**, 690.
4. बहादुर, के०, रंगनायकी, एस० तथा सैंटामारियो, एल०, Nature 1958, **182**, 1668.
5. वाइस, ए० एच० तथा शापिरा, जे०, Hydrocerbon Process, 1970, **49**, (21), 119.

6. कुमार, ए०, डी० फिल थीसिस, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, 1964.

7. वर्मा, एम० एल०, डी० फिल थीसिस, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, 1974.

8. बहादुर, के० तथा रंगनायकी, एस०, J. Brit. Interplanetary Society, 1970, **23**, (12) 813.

9. रैना, वी०, डी० फिल थीसिस, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, 1973.

10. बटलेराव, ए०, Nature, 1966, **212**, 401.

11. मिलर, एस० एल० तथा यूरे, एच० सी०, Science, 1959, **130**, 1365.

12. ब्रिग्स, एम० एच०, Space Flight, 1965, 7 (4), 129-131.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 31, No. 4, 1988

कतिय आपरेटरों की ली-निश्चरता

रेहाना कुरेशी

जी/1, अरविन्द कालोनी, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

सारांश

व्यापक सापेक्षवाद के ज्ञात तीन आपरेटरों की ली-निश्चरता पर विचार किया गया है और यह दिखलाया गया है कि इनकी निश्चरता विशेष प्रकार के तरल प्रवाहों के लिये दृढ़ता की शर्त बतलाने वाली है।

Abstract

Lie invariance of certain operators along time like congruences in general relativity. *By* Rehana Quraishi, G/1, Arvind Colony, B. H. U., Varanasi.

In this paper Lie invariance of three operators known in general relativity are considered and it is shown that their invariance imply the condition of rigidity for certain special type of fluid flows.

1. प्रस्तावना

वेक्टर क्षेत्रों के निश्चर वर्गीकरण का ज्ञान ब्रह्मांडकीय निदर्शों के गुणधर्मों को प्राप्त करने तथा गुरुत्वीय स्खलन की शर्तों को व्युत्पन्न करने में सहायक होता है। समष्टिवत सर्वांगसमतायें यथा भ्रमिल रेखायें तथा चुम्बकीय क्षेत्र नलिकायें एवं ऊष्मा अभिवाह नलिकायें एहलर[1], जोर्डन[2] तथा ग्रीनबर्ग[3] द्वारा विस्तार से विवेचित हुई हैं।

इस प्रपत्र में जिन तीन आपरेटरों पर विचार किया गया है उन्हें निम्नवत् परिभाषित किया जाता है

$$h_{ij} \underline{\underline{\text{def}}}\, g_{ij} - v_i v_j$$

$$P_{ij} \text{ def } g_{ij} - v_i v_j + m_1 m_j$$

$$L_{ij} = g_{ij} + (N_i N_j)(N_R v^R)^{-2} -$$

$$(N_i v_j + N_j v_i)(N_R v^R)^{-1}$$

जहाँ $v^i v_i; = 1, m^i m_i = -1, N^i N_i = 0$

v^i काल जैसा यूनिट वेक्टर क्षेत्र है m^i समिष्ट जैसा यूनिट वेक्टर क्षेत्र है और N^i उदासीन वेक्टर क्षेत्र है। दूरीक का चिन्हक $(---+)$ लिया गया है।

काल जैसे वेक्टर का सहपरिवर्ती ब्युत्पन्न निम्न प्रकार से विघटित किया जा सकता है।

$$v_i + v_{i;k} V^l$$

$$\Theta = \tfrac{1}{3} V^k{}_{;k}$$

$$\sigma_{ij} = V_{(i;j)} + \dot{v}_{(i} V_{j)} - \Theta h_{ij}$$

$$= \sigma_{ij},\ \sigma_{ij} U^j = 0$$

$$\omega_{ij} = \dot{V}_{[i;j]} - [V_j V_i]$$

$$= -\omega_{ji},\ \omega_{ij} v^j = 0$$

$\dot{V}_i, \Theta, \sigma_{ij}$ तथा ω_{ij} मात्राओं को क्रमशः तरल प्रवाह वेक्टर का त्वरण प्रसार, अपरूपण तथा घूर्णन कहा जाता है। गोला चिन्ह संमितीकरण का सूचक है जबकि वर्गाकार कोष्टक प्रति-संमितीकरण का सूचक है।

सापेक्षकीय-यांत्रिकी में दृढ़ता की संकल्पना की विवेचना $\sigma_{ij} = 0$ एवं $\Theta = 0$ समीकरणों के रूप में की जाती है।

कालवत् सर्वांगसमताओं के साथ h_{ij} की निश्चरता का विस्तृत अध्ययन ट्राउटमैन ने[4] किया है। यह दिखलाया गया है कि दृढ़ता के लिये आपरेटरों h_{ij} के ली-व्युत्पन्न का विलोपन अनिवार्य तथा पर्याप्त प्रतिबन्ध है।

2. P_{ij} तथा L_{ij} आपरेटरों की ली-निश्चरता

प्रमेय 1

चार विमीय रीमानी दिक्काल में आपरेटर P_{ij} के व्युत्पन्न का कालवत् सर्वांगसमताओं के साथ विलोपन दृढ़ गति का सूचक होता है यदि समष्टिवत् वेक्टर हार्मोनी हो।

उपपत्ति

$$\underset{V}{L} P_{ij} = P_{ij;k} V^k + P_{jk} v^k{}_{;i} + P_{ik} + P_{ik} V^k{}_{;j}$$

$$= -V_j \dot{V}_i - V_i \dot{V}_j + m_i V^k (m_{i,k} - m_{k;i})$$

$$+ m_i V^k (m_{j;k} - m_{k;j}) + V_{i;j} + V_{j;i} \qquad (2.1)$$

यदि m_i हार्मोनिक हो तो

$$m_{i;k} - m_{k;i} = 0$$

और उपर्युक्त समीकरण निम्नलिखित रूप में समानीत हो जाता है

$$\underset{V}{E}P_{ij}=-V_j\dot{V}_i-V_i\dot{V}_j+V_{i;j}+V_{j;i}$$
$$=\mathscr{L}h_{ij} \tag{2.3}$$

अर्थात्

$$\underset{V}{E}P_{ij}=0 \Rightarrow \underset{V}{E}h_{ij}=0$$

प्रमेय 2

रीमानी दिक्-काल में आपरेटर L_{ij} के ली-व्युत्पन्न का कालवत् सर्वांगसमताओं के साथ विलोपन दृढ़ता की उस दशा का सूचक है जब हम तरल प्रवाह को ज्योडिसीय (geodetic) मान लेते हैं ।

उपपत्ति

$$\underset{V}{E}L_{ij}=L_{ij;k}V^k+L_{ik}V^k{}_{;j}+L_{kj}V^k{}_{;i}$$
$$=(N_RV^R)^{-2}N_jV^k(N_{i;k}-N_{k;i})$$
$$+N_iV^k(N_{j;k}+N_{k;j})$$
$$+(N_Rv^R)^{-1}(N_{k;j}-N_{j;k})-N_iV^kV_{k;j}-N_jV^kV_{k;i}$$
$$+V_{i;j}+V_{j;i} \tag{2.4}$$

चूंकि (N_RV^R) अदिश है और हम जानते हैं कि प्रकाश किरणें निरपेक्ष ज्योडिसीय हैं । इसका अर्थ हुआ कि

$$N_{i;j}N^j=N^jN_{j;i}=0$$

अर्थात्

$$(N_{i;j}-N_{j;i})=0 \tag{2.5}$$

(2.5) के सम्प्रयोग से समीकरण (2.4) समीकरण (2.6) में समानीत हो जाता है

$$\underset{V}{E}L_{ij}=(N_Rv^R)^{-1}-N_i\dot{V}_j-N_j\dot{V}_i+V_{i;j}+V_{j;i} \tag{2.6}$$

$2(N_RV^R)$ को K के रूप में लिखते हुये अदिश मात्रा समीकरण (2.6) निम्नवत् हो जाता है ।

$$(N_i-V_i)\dot{V}_j+(N_j-V_j)\dot{V}_i=K(\Theta h_{ij}+\sigma_{ij}) \tag{2.7}$$

द्रव प्रवाह ज्योडिसीय है अतएव त्वरण वेक्टर लुप्त हो जाता है और समीकरण (2.7) प्रदर्शित करता है कि

$$\sigma_{ij}=0 \text{ तथा } \Theta=0$$

जो दृढ़ता का वांछित प्रतिबन्ध है ।

खाडे[5] ने अपने शोध प्रबन्ध में इन आपरेटरों की ली-निश्चरता का अध्ययन समष्टि जैसी सर्वांगसमताओं के लिये किया है ।

निर्देश

1. एहलर, जे०, Akad. Wiss. Lit Mainz, Abhandl. Math. Nat. Kl, 1961, No. 11.
2. जोर्डन, ए०, इत्यादि, Akad. Wiss Lit. Mainz, Abhandl. Math. Nat. Kl, 1961, No. 1.
3. ग्रीनबर्ग, पी० जे०, J. Math. Anl. Appl., 1970, **30** (1), 128.
4. ट्राउटमान, Lecturers on G. R. Bradies Summer institute in theoretical Physics भाग 1 प्रेंटिस हाल, न्यूजर्सी, 1964.
5. खाडे, वी० डी०, **पी० एच० डी० थीसिस**, शिवाजी विश्वविद्यालय, 1973,

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 31, No. 4, 1988

वाहित मल-जल से सिंचाई के नये आयाम

शिव गोपाल मिश्र, चन्द्र प्रकाश श्रीवास्तव तथा दिनेश मणि

शीलाधर मृदा-विज्ञान संस्थान
इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—जुलाई 1, 1988]

सारांश

मिट्टी में 1% तथा 2% F.Y.M. मिलाकर एवं N.P.K. की संस्तुत मात्रायें (50-30-50 कि० ग्रा०/हैक्टे०) डालने के बाद वाहित मल-जल से सिंचाई की गयी। फिर उसमें हरी सब्जी (पालक) उगाई गयी। यह पाया गया कि वाहित मल-जल से सिंचाई करने पर सामान्य पानी से सिंचाई की तुलना में उपज अच्छी हुई है किन्तु फसल की गुणवत्ता पर विशेष अन्तर नहीं आया।

वाहित मल-जल से सिंचाई करने पर आवश्यक पोषक तत्वों के साथ-साथ कुछ विषैले भारी तत्व भी मिट्टी में मिलते रहते हैं। इन तत्वों में से एक तत्व-कैडमियम की उपस्थिति में तीन हरी सब्जियाँ उगाई गयीं। प्राप्त परिणामों से पता चलता है कि यद्यपि उनकी उपज पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता किन्तु तुलनात्मक दृष्टि से चौलाई में कैडमियम का अवशोषण विषाक्तता स्तर तक हो जाता है जबकि पालक एवं मेंथी में क्रमश: अवशोषण कम मात्रा में हुआ।

Abstract

New dimensions in sewage irrigation. *By* S. G. Misra, C. P. Srivastava and Dinesh Mani, Sheila Dhar Institute Soil Science, University of Allahabad, Allahabad.

Field trials conducted at Sheila Dhar Institute Farm on the use of sewage water for irrigating spinach crop after adding 1% and 2%F.Y.M. along with requisite amounts of N.P.K. (50-30-50 kg/ha) showed that the yield of green leafy material was greater in comparison to the yield obtained by using fresh water for irrigating spinach crop. However, no differenee in the quality of crop was observed.

Experiments were also conducted by adding 0, 5, 15, 25 and 50 ppm of Cd as $CdCl_2$ in order to find out the effect of Cd to simulate the differential content of Cd in sewage water irrigation on three leafy vegetables viz. Spinach (Palak), Chaulai and Methi. It was observed that though the weight of leafy material was not affected but the absorption of Cd by the vegetable crops increased with increasing doses of Cd. It is interesting that the level of Cd in Chaulai reached the toxicity level.

It is suggested that consumption of leafy vegetable be made only after detecting the Cd level in them.

किसान वहित मल-जल से सिचाई करके अच्छी उपज लेते रहे हैं और नगण्य लागत पर आवश्यक पोषक तत्वों से अपनी मृदा को उर्वर बनाते रहे हैं। मिचेल[1] ने यूरोप में वाहित मल-जल से की जाने वाली खेती का सर्वेक्षण करने के उपरान्त यह पाया कि वाहित मल-जल से सब्जियों तथा घासों की उपज में आशातीत वृद्धि होती है किन्तु वाहित मल-जल से सिंचाई करने पर आवश्यक पोषक तत्वों में साथ-साथ कुछ विषैले भारी तत्व भी मिट्टी में मिलते रहते हैं जिनका प्रभाव मिट्टी तथा पौधों दोनों पर पड़ता है। इन तत्वों में मुख्यतः Cd, Pb, Cr, Cu, Zn रहते हैं। इनमें से Cd के ऊपर विशेष ध्यान दिया जा रहा है। एब्डन तथा नेनाह[2] के अनुसार बलुई मिट्टियों की सिंचाई वाहित मल-जल से करने पर मिट्टी की संरचना सुधर जाती है किन्तु लगातार सिंचाई करते रहने से भविष्य में नाइट्रोजन के खनिजीकरण पर प्रतिकूल असर पड़ सकता है। शर्मा इत्यादि[3] ने लुधियाना के आसपास के वाहित मल-जल से सिंचित क्षेत्र का सर्वेक्षण करने पर पाया कि वाहित मल-जल में **Fe, Mn, Cu** तथा Cd की अधिक मात्रा होने के कारण मिट्टी तथा पौधों में इन तत्वों की अधिक मात्रा पायी गई जबकि ट्यूबवेल के पानी से सिंचित क्षेत्र में ऐसा नहीं पाया गया। इन विषैले भारी तत्वों में से कैडमियम अत्यन्त विषैला होता है किन्तु इस तत्व का मृदा एवं पौधों पर जो प्रभाव पड़ता है उसका अध्ययन भारतीय परिस्थितियों में नहीं हुआ। फलतः हमने वाहित मल-जल से सिंचाई करके पौधों की वृद्धि, उपज एवं इस धातु के प्रभाव का अध्ययन करना उचित समझा।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन के लिये शीलाधर मृदा-विज्ञान संस्थान के कृषि फार्म को चुना गया जिसकी सिंचाई विगत 15 वर्षों से वाहित मल-जल से ही होती है और जिसमें मुख्यतः सब्जियों की खेती की जाती है।

हमने इस प्रयोग के लिये तीन पत्तीदार सब्जियों पालक, चौलाई एवं मेंथी को चुना। अध्ययन के लिये चार प्रकार के प्रयोग किये गये। प्रथम प्रयोग में पालक की बढ़वार पर वाहित मल-जल के प्रभाव के अध्ययन के लिये दो तरह के प्रक्षेत्रों में पालक उगाई गयी। प्रथम प्रक्षेत्र में वाहित मल-जल से सिंचाई की गई तथा दूसरे प्रक्षेत्र में सिंचाई हेतु सामान्य जल का प्रयोग किया गया। दोनों तरह के प्रक्षेत्रों में गोबर की खाद (FYM) की दो भिन्न-भिन्न मात्रायें (1% तथा 2%) प्रयुक्त की गयीं। साथ

ही NPK की संस्तुत मात्रा (50-30-50kg/ha) भी प्रयोग की गयी। हमने 15 तथा 30 दिन बाद पालक काटकर उसका भार ज्ञात किया। प्राप्त परिणाम सारिणी 1 में अंकित किये गये हैं।

दूसरे, तीसरे एवं चौथे प्रयोग में क्रमशः पालक (बनारसी), चौलाई (पन्त हरी) एवं मेंथी की उपज पर कैडियम धातु का प्रभाव देखा गया। इसके लिये हमने $Cd\ Cl_2$ (कैंडमियम क्लोराइड) का प्रयोग 0, 5, 15, 25, 50 ppm Cd की दर से किया क्योंकि वाहित मल-जल में Cd की विभिन्न मात्रायें उपस्थित रहती हैं। यादृच्छिक ढंग से सब्जियों की बुवाई की गयी। सिंचाई हेतु सामान्य जल का प्रयोग किया गया। 30 दिन पश्चात् विभिन्न सब्जियों में पत्तियों की संख्या, पोधों की ऊँचाई तथा हरे पदार्थ का भार ज्ञात किया गया। परिणाम सारणी 2 में अंकित हैं। मिट्टी तथा फसल दोनों में कैडमियम की मात्रा ज्ञात की गयी। मृदा में कैडमियम की उपलब्धता को एटामिक एबजार्प्शन स्पेक्ट्रोफोटोमीटर (A.A.S.) [परकिन-300] से डी० टी० पी० ए०-टी० निष्कर्षण द्वारा ज्ञात किया गया। परिणाम सारणी 3 में अंकित हैं।

परिणाम तथा विवेचना

विभिन्न प्रयोगों द्वारा प्राप्त परिणामों का विवरण इस प्रकार है—

सारणी 1 (अ)

पालक की बढ़वार पर वाहित मल-जल का प्रभाव

उपचार	वाहित मल-जल से सिंचाई: पत्तियों की संख्या	वाहित मल-जल से सिंचाई: पौधे की ऊँचाई (से० मी० में)	सामान्य पानी से सिंचाई: पत्तियों की संख्या	सामान्य पानी से सिंचाई: पौधे की ऊँचाई (से० मी० में)
		बुवाई के 15 दिन बाद		
1. कन्ट्रोल	4	6	3	4
2. 1% FYM+NPK	6	8	5	7
3. 2% FYM+NPK	8	10	6	9
		बुवाई के 30 दिन बाद		
1. कन्ट्रोल	10	11	7	9
2. 1% FYM+NPK	16	18	10	13
3. 2% FYM+NPK	19	20	14	17

सारणी 1 (ब)

पालक की उपज पर वाहित मल-जल का प्रभाव

उपचार	वाहित मल से सिंचाई ताजा भार (कि० ग्रा०/मी०^2)	सामान्य जल से सिंचाई ताजा भार (कि० ग्रा०/मी०^2)
1. कन्ट्रोल	3.60	2.40
2. 1% FYM+NPK	4.80	3.20
3. 2% FYM+NPK	5.40	4.00

सारणी 2

पालक, चौलाई एवं मेथी की उपज पर कैडमियम का प्रभाव

औसत उपज	उपचार (डाली गई Cd की मात्रा ppm में)				
ग्रा०/मी०^2	0	5	15	25	50
पालक	85	79	91	89	82
चौलाई	290	287	215	201	167
मेंथी	340	345	321	336	348

सारणी 3

मृदा में उपलब्ध कैडमियम की मात्रा

	उपचार (कैडमियम की मात्रा ppm में)				
डी० टी० पी० ए०	0	5	15	25	50
निष्कर्षित मृदा में (ppm में)	0.45	1.7	6.9	21.3	54.0

सारणी 4

पालक, चौलाई एवं मेंथी की पत्तियों में कैडमियम की मात्रा (ppm में)

	उपचार (कैडमियम की मात्रा ppm में)				
	0	5	15	25	50
पालक	0.43	4.7	15.9	35.8	45.7
चौलाई	0.94	9.4	21.2	40.0	63.0
मेंथी	0.49	2.1	7.3	21.6	32.8

प्राप्त परिणामों से यह सूचित होता है कि वाहित मल-जल से सिंचाई करने पर हरी पत्तीदार सब्जियों में पत्तियों की संख्या, उनकी ऊँचाई तथा उनके भार वृद्धि होती है। विषैले भारी तत्व जैसे कैडमियम (Cd) की उपस्थिति में सब्जियों के हरे भार पर विशेष प्रभाव नहीं पड़ता किन्तु तुलनात्मक दृष्टि से पत्तीदार सब्जियों में से चौलाई में कैडमियम (Cd) का अवशोषण विषक्तता स्तर तक हो जाता है जबकि पालक एवं मेंथी में Cd का अवशोषण कम मात्रा में हुआ। अतः हम कह सकते हैं कि वाहित मल-जल से सिंचाई करने पर हरी पत्तीदार सब्जियों की उपज तो अच्छी होती है परन्तु इनमें भारी धातु का अवशोषण भी अधिक होता है जिससे मनुष्यों या पशुओं द्वारा इनका उपभोग किये जाने पर उनके स्वास्थ्य पर प्रतिकूल प्रभाव पड़ सकता है। इस प्रकार यह आवश्यक हो जाता है कि वाहित मल-जल को तनुकरण या विभिन्न उपचार के पश्चात् ही सिंचाई हेतु प्रयोग किया जाय।

निर्देश

1. मिचेल, जी० ए०, "Observations of Sewage farming in Europe," Engg. New Record, 1931. **106** : 66-69,

2. एब्डन, एफ० एम० तथा नेनाह, एम०, "Effect of irrigating loamy sand soil by liquid sewage sludge on its content of some micronutrients," Plant and Soil 1980, **56**, : 53-57.

3. शर्मा, वी०के० तथा कौशल, वी०डी०, "Heavy metals cotamination of Soil and Plants with sewage irrigation". Polln. Res. **5** (324) : 86-91 (11 Ref.).

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 31. No. 4, 1988

बहुचरीय I-फलन के लिये कतिपय समाकल तथा प्रसार सूत्र

वी० पी० सिंह तथा वाई० एन० प्रसाद
सम्प्रयुक्त गणित विभाग, इंस्टीट्यूट आफ टेक्नॉलॉजी,
बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी, वाराणसी

[प्राप्त—अप्रैल 19, 1988]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में हाल ही में प्रसाद द्वारा प्रचालित बहुचरीय I-फलन वाले कतिपय समाकल तथा प्रसार सूत्रों की स्थापना की गई है।

Abstract

Some integral and expansion farmulae for the multivariable *I*-function. *By* V. P. Singh and Y. N. Prasad, Department of Applied Mathematics, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi.

In this paper, we establish some integral and expansion formulae involving the multivariable I-function which has been introduced recently by Prasad[1]. The integral and expansion formula recently established by Sharma[2] are special cases of our results.

1. प्रसाद[1] तथा प्रसाद एवं सिंह[3] ने जिस बहुचरी I-फलन का सूत्रपात एवं अध्ययन किया है उसे निम्न प्रकार से लिखा जावेगा

$$I[x_1, \ldots, x_r] = I^{o,n_2 : \ldots : o,n_r : (m',n'); \ldots; (m^{(r)},n^{(r)})}_{p_2,q_2 : \ldots p_r,q_r : [p',q']; \ldots; [p^{(r)},q^{(r)}]}$$

$$\left[x_1,\ldots,x_r \left| \begin{matrix} (a_{2j}; \alpha'_{2j}, \alpha''_{2j})_{1,p_2} : (a_{3j}; \alpha'_{3j}, \alpha''_{3j}, \alpha'''_{3j})_{1,p_3} : \ldots : \\ \\ (b_{2j}; \beta'_{2j}, \beta''_{2j})_{1,q_2} : (b_{3j}; \beta'_{3j}, \beta''_{3j}, \beta'''_{3j})_{1,q_3} : \ldots : \end{matrix} \right. \right.$$

$$\left.\begin{matrix}(a_{rj};\alpha'_{rj},\ldots,\alpha^{(r)}_{rj})_{1,p_r}:(a'_j,\alpha'_j)_{1,p'};\ldots;(a^{(r)}_j,\alpha^{(r)}_j)_{1,p^{(r)}}\\ (b_{rj};\beta'_{rj},\ldots,\beta^{(r)}_{rj})_{1,p_r}:(b'_j,\beta'_j)_{1,q'};\ldots;(b^{(r)}_j,\beta^{(r)}_j)_{1,q^{(r)}}\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{1}{2(\pi w)^r}\int_{L_1}\cdots\int_{L_r}\phi_1(s_1)\ldots\phi_r(s_r)_r\,\psi(s_1,\ldots,s_r)x_1^{s_1}\ldots x_r^{s_r}ds_1\ldots ds_r \tag{1.1}$$

जहां $w=\sqrt{-1}$

$$\phi_i(s_i)=\frac{\prod_{j=1}^{m^{(i)}}\Gamma(b_j^{(i)}-\beta_j^{(i)}s_i)\prod_{j=1}^{n^{(i)}}\Gamma(1-a_j^{(i)}+\alpha_j^{(i)}s_i)}{\prod_{j=m^{(i)}+1}^{q^{(i)}}\Gamma(1-b_j^{(i)}+\beta_j^{(i)}s_i)\prod_{j=n^{(i)}+1}^{p^{(i)}}\Gamma(a_j^{(i)}-\alpha_j^{(i)}s_i)} \tag{1.2}$$

$\forall\ i\in\{1,\ldots,r\}$,

$$\psi(s_1\ldots,s_r)=\frac{\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(1-a_{2j}+\sum_{i=1}^{2}\alpha_{2j}^{(i)}s_i)\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma(1-a_{3j}+\sum_{i=1}^{3}\alpha_{3j}^{(i)}s_i)\ldots}{\prod_{j=n_2+1}^{p_2}\Gamma(a_{2j}-\sum_{i=1}^{2}\alpha_j^{(i)}s_i)\prod_{j=n_3+1}^{p_3}\Gamma(a_{3j}-\sum_{i=1}^{3}\alpha_{3j}^{(i)}s_i)\ldots}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{n_r}\Gamma(1-a_{rj}+\sum_{i=1}^{r}\alpha_{rj}^{(i)}s_i)}{\prod_{j=n_r+1}^{p_r}\Gamma(a_{rj}-\sum_{i=1}^{r}\alpha_{rj}^{(i)}s_i)\prod_{j=1}^{q_2}\Gamma(1-b_{2j}+\sum_{i=1}^{2}\beta_{2j}^{(i)}s_i)\ldots}$$

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^{q_r}\Gamma(1-b_{rj}+\sum_{i=1}^{r}\beta_{rj}^{(i)}s_i)} \tag{1.3}$$

जहाँ ऊपर लिखित (i)से डैशों की संख्या सूचित होती है तथा $a^{(1)}=a',a^{(2)}=a''$ इत्यादि

$(a'_1,\alpha'_j)_{1,p'}$ तथा $(a_{2j};\alpha'_{2j},\alpha''_{2j})_{1,p_2}$

संक्षेपण है p' तथा p^2 प्राचलों के अनुक्रम का अर्थात् क्रमश :

$(a'_1,\alpha'_1),\ldots,(a'_{p'},\alpha'_{p'})$ तथा $(a_{21};\alpha'_{21},\alpha''_{21}),\ldots,(a_{2p_2};\alpha'_{2p_2},\alpha''_{2p_2})$

रिक्त गुणनफल को इकाई माना गया है, गुणांक

$$\alpha_j^{(i)}, \beta_j^{(i)}, \alpha_{kj}^{(i)}, \beta_{kj}^{(i)} (i=1,\ldots,r; k=2,\ldots r)$$

धनात्मक वास्तविक हैं और

$$a_j^{(i)}, b_j^{(i)} \ (i=1,\ldots,r), a_{kj}, b_{kj} (k=2,\ldots r)$$

संकुल संख्यायें हैं

$$m^{(i)}, n^{(i)}, p^{(i)}, q^{(i)} \ (i=1,\ldots,r), n_k, p_k, q_k (k=2,\ldots,r)$$

धन पूर्णांक हैं जिनसे

$$0 \leqslant m^{(i)} \leqslant q^{(i)}, 0 \leqslant n^{(i)} \leqslant p^{(i)}, q_k \geqslant 0, \ 0 \leqslant n_k \leqslant p_k$$

की तुष्टि होती है।

सम्मिश्र S_i- तल में कंटूर L_i मेलिन-बार्नीज प्रकार है जो अपने दंतुरों समेत $-w\infty$ से $+w\infty$ तक इस तरह विस्तीर्ण है कि यदि आवश्यकता पड़े तो

$$\Gamma(b_j^{(i)} - \beta_j^{(i)} s_i), (j=1,\ldots,m^{(i)})$$

के सारे पोल L_i के दाईं ओर

$$\Gamma(1-a_j^{(i)} + \alpha_j^{(i)} s_i), (j=1,\ldots,n^{(i)}),$$

$$\Gamma(1-a_{2j} + \sum_{i=1}^{2} \alpha_{2j}^{(i)} s_i), (j=1,\ldots,n_2), \ldots,$$

$$\Gamma(1-a_{rj} + \sum_{i=1}^{r} \alpha_{rj}^{(i)} s_i), (j=1,\ldots,n_r)$$

के सारे पोल इसके बाईं ओर पड़ें।

कंटूर समाकल अभिसारी होता है यदि

$$|\arg x_i| < \tfrac{1}{2} U_i \pi, U_i > 0, i=1,\ldots,r; \qquad (1.4)$$

जहाँ

$$U_i = \sum_{j=1}^{n^{(i)}} \alpha_j^{(i)} - \sum_{j=n^{(i)}+1}^{p^{(i)}} \alpha_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{m^{(i)}} \beta_j^{(i)} - \sum_{j=m^{(i)}+1}^{q^{(i)}} \beta_j^{(i)}$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{n_2} \alpha_{2j}^{(i)} - \sum_{j=n_2+1}^{p_2} \alpha_{2j}^{(i)}\right) + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{n_r} \alpha_{rj}^{(i)} - \sum_{j=n_r+1}^{p_r} \alpha_{rj}^{(i)}\right)$$

$$-\left(\sum_{j=1}^{q_2} \beta_{2j}^{(i)} + \ldots + \sum_{j=1}^{q_r} \beta_{rj}^{(i)}\right). \tag{1.5}$$

ब्राक्समा[5] के अनुकरण से यह देखा जा सकता है कि

$$I[x_1,\ldots,x_r]=0(|x_1|^{\alpha_1}\ldots|x_r|^{\alpha_r}),\ \max\{|x_1|,\ldots,|x_r|\}\to 0$$

जहाँ

$$\alpha_1=\min Re\left(\frac{b_j^{(i)}}{\beta_j^{(i)}}\right),\ (j=1,\ldots,m^{(i)};\ i=1,\ldots,r) \tag{1.6}$$

तथा

$$I\,[x_1,\ldots,x_r]=0(|x_1|^{\beta_1}\ldots|x_r|^{\beta_r}),\ \min\,\{|x_1|,\ldots,|x_r|\}\to\infty$$

जहाँ

$$\beta_i=\max Re\left(\frac{a_j^{(i)}-1}{\alpha_j^{(i)}}\right),\ (j=1,\ldots,n^{(i)};\ i=1,\ldots,r;$$

$$n_2=n_3=\ldots n_r=0). \tag{1.7}$$

2. समाकल

इस अनुभाग में हमने निम्नलिखित समाकलों की स्थापना की है जिनमें (1.1) द्वारा परिभाषित बहुचरीय I-फलन निहित है :

प्रथम समाकल

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{u-1} (\cos x)^{v-1} e^{i(u+v)x}\, I^{o,n_2:\ldots:o,n_r:}_{p_2,q_2:\ldots p_r,q_r:}$$

$$\begin{matrix}(m',n');\ \ldots;\ (m^{(r)},n^{(r)}) \\ [p',q'];\ \ldots;\ [p^{(r)},p^{(r)}]\end{matrix}\left\{\begin{matrix}(a_{2j};\ \alpha'_{2j},\alpha''_{2j})_{1,p_2}:\ldots: \\ (b_{2j};\ \beta'_{2j},\beta''_{2j})_{1,q_2}:\ldots:\end{matrix}\right.$$

$$(a_{rj}\alpha;\ '_{rj},\ \ldots,\ \alpha^{(r)}_{rj})_{1,p_r}:(a'_j,\alpha'_j)_{1,p'};\ldots;(a^{(r)}_j,\alpha^{(r)}_j)_{1,p^{(r)}}$$

$$(b_{rj};\ \beta'_{rj},\ldots,\beta^{(r)}_{rj})_{1,q_r}:(b'_j,\beta'_j)_{1,q'}:\ldots;(b^{(r)}_j,\beta^{(r)}_j)_{1,q^{(r)}}$$

$$[x_1 (\sin xe^{ix})^{h_1},\ldots,x_r (\sin xe^{ix})^{h_r}]\, dx$$

$$=e^{iu\,\pi/2}\, \Gamma(V)\, I^{o,n_2\,:\,\ldots\,:\,o,n_{r-1}\,:\,o,n_{(r)}+1\,:\,(m',n');\,\ldots;}_{p_2,q_2\,:\,\ldots\,:\,p_{r-1},q_{r-1}\,:\,p_r+1,q_r+1\,:\,[p',q'];\,\ldots;}$$

$$\begin{matrix} (m^{(r)},n^{(r)}) \\ [p^{(r)},q^{(r)}] \end{matrix} \left[\begin{matrix} (a_{2j};\, a'_{2j},\, a''_{2j})_{1,p_2} : \ldots : \\ (b_{2j};\, \beta'_{2j},\, \beta''_{2j})_{1,q_2} : \ldots : \end{matrix} \right.$$

$$(a_{(r-1)j};\, a'_{(r-1)j},\ldots,a^{(r-1)}_{(r-1)j})_{1,p_{r-1}} : (1-u;\, h_1,\ldots,h_r),$$

$$(b_{(r-1)j};\, \beta'_{(r-1)j},\ldots,\beta^{(r-1)}_{(r-1)j})_{1,q_{r-1}} : (b_{rj};\beta'_{rj},\ \ldots,\ \beta'_{rj})_{1,q_r}.$$

$$(a_{rj};\, a'_{rj},\ldots,a^{(r)}_{rj})_{1,p_r} : (a'_j,\, a'_j)_{1,p'}\, ;\, \ldots;$$

$$(1-u-v;\, h_1,\ldots,h_r) : (b'_j,\beta'_j)_{1,q'}\ ;\ \ldots;$$

$$\left. \begin{matrix} (a^{(r)}_j\, ,\, a^{(r)}_j\,)_{1,p^{(r)}} \\ (b^{(r)}_j\, ,\, \beta^{(r)}_j\,)_{1,q^{(r)}} \end{matrix} \right| x_1\, e^{ih_1\pi/2},\ldots,x_r\, e^{ih_r\pi/2} \Bigg] \tag{2.1}$$

बशर्ते कि

$$h_1,\ldots,h_r>0;\ Re\,(u+\sum_{j=1}^{r} h_j\, a_j)>0,\ Re\,(v)>0,$$

$$|\arg x_j|<\tfrac{1}{2}U_j\,\pi,\ U_j>0,\, j=1,\ldots,\, r,$$

जहाँ U_j तथा a_j को समीकरण (1.5) तथा (1.6) द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। $I\,[x_1,\,\ldots,\,x_r]$ बहुचरीय I-फलन है जिसे (1.1) द्वारा परिभाषित एवं अंकित किया जाता है।

द्वितीय समाकल

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{u-1} (\cos x)^{v-1}\, e^{i(u+v)x}\, I^{o,\,n_2\,:\,\ldots\,:\,o,n_r\,:\,(m',n');}_{p_2,q_2\,:\,\ldots\,:\,p_r,q_r\,:\,[p',q'];}$$

$$\begin{matrix} \ldots;\,(m^{(r)},n^{(r)}) \\ \ldots;\,[p^{(r)},q^{(r)}] \end{matrix} \left[\begin{matrix} (a_{2j};\, a'_{2j},\, a''_{2j})_{1,p_2} : \ldots : (a_{rj};\, a'_{rj},\ldots,a^{(r)}_{rj})_{1,p_r} \\ (b_{2j};\, \beta'_{2j},\, \beta''_{2j})_{1,q_2} : \ldots : (b_{rj};\, \beta'_{rj},\ldots,\beta^{(r)}_{rj})_{1,q_r} \end{matrix} \right.$$

$$: (a_j', \alpha_j')_{1,p'}; \ldots; (a_j^{(r)}, \alpha_j^{(r)})_{1,p^{(r)}} \Big| \; x_1 (\tan x)^{h_1}, \ldots, x_r (\tan x)^{h_r} \Big] dx$$
$$: (b_j', \beta_j')_{1,q'}; \ldots; (b_j^{(r)}, \beta_j^{(r)})_{1,q^{(r)}}$$

$$= \frac{e^{iu\pi/2}}{\Gamma(u+v)} I^{o,n_2 : \ldots : o,n_{(r-1)} : 1,n_r+1 : (m',n'); \ldots;}_{p_2,q_2 : \ldots : p_{(r-1)}q_{(r-1)} : p_r+1,q_r+1 : [p',q'] : \ldots;}$$

$$\begin{matrix} (m^{(r)},n^{(r)}) \\ [p^{(r)},q^{(r)}] \end{matrix} \left[\begin{matrix} (a_{2j}; \alpha_{2j}', \alpha_{2j}'')_{1,p_2} : \ldots : \\ (b_{2j}; \beta_{2j}', \beta_{2j}'')_{1,q_2} : \ldots : \end{matrix} \right.$$

$$(a_{(r-1)j}; \alpha_{(r-1)j}', \ldots, \alpha_{(r-1)j}^{(r-1)})_{1,p_{(r-1)}} : (1-u; h_1, \ldots, h_r),$$

$$(b_{(r-1)j}; \beta_{(r-1)j}', \ldots, \beta_{(r-1)j}^{(r-1)})_{1,q_{(r-1)}} : (v; h_1, \ldots, h_r),$$

$$a_{rj}; \alpha_{rj}', \ldots, \alpha_{rj}^{(r)})_{1,p_r} : (a_j', \alpha_j')_{1,p'}; \ldots; (a_j^{(r)}, \alpha_j^{(r)})_{1,p^{(r)}}$$

$$(b_{rj}; \beta_{rj}', \ldots, \beta_{rj}^{(r)})_{1,q_r} : (b_j', \beta_j')_{1,q'}; \ldots; (b_j^{(r)}, \beta_j^{(r)})_{1,q^{(r)}}$$

$$\Big| \; x_1 \, e^{ih_1\pi/2}, \ldots, x_r \, e^{ih_1\pi/2} \Big] \tag{2.2}$$

बशर्ते कि

$$h_1, \ldots, h_r > 0; \; Re\,(u + \sum_{j=1}^{r} h_j \, \alpha_j) > 0, \; Re\,(v - \sum_{j=1}^{r} h_j \, \alpha_j) > 0,$$

$$|\arg x_j| < \tfrac{1}{2} U_j \, \pi, \; U_j > 0, \; j = 1, \ldots, r,$$

जहाँ U_j तथा α_j को क्रमशः (1.5) एवं (1.6) समीकरणों द्वारा व्यक्त किया जाता है ।

तृतीय समाकल

$$\int_c^{\infty} x^{\rho} \, e^{-x} \, L_k^{(\sigma)}(x) \; I^{o,n_2 : \ldots : o,n_r : (m',n'); \ldots;}_{p_2,q_2 : \ldots : p_r,q_r : [p',q'] ; \ldots;}$$

$$\begin{matrix} (m^{(r)},n^{(r)}) \\ [p^{(r)},q^{(r)}] \end{matrix} \left[\begin{matrix} (a_{2j}; \alpha_{2j}', \alpha_{2j}'')_{1,p_2} : \ldots : (a_{rj}; \alpha_{rj}', \ldots, \alpha_{rj}^{(r)})_{1,p_r} : \\ (b_{2j}; \beta_{2j}', \beta_{2j}'')_{1,q_2} : \ldots : (b_{rj}; \beta_{rj}', \ldots, \beta_{rj}^{(r)})_{1,q_r} : \end{matrix} \right.$$

$$\left.\begin{matrix}(a_j', \alpha_j')_{1,p'}; \ldots; (a_j^{(r)}, \alpha_j^{(r)})_{1,p^{(r)}} \\ (b_j', \beta_j')_{1,q'}; \ldots; (b_j^{(r)}, \beta_j^{(r)})_{1,q^{(r)}}\end{matrix}\right| c_1 x_1^{\mu_1}, \ldots, c_1 x_r^{\mu_1} \Bigg] dx$$

$$= \frac{1}{k!} I^{o,n_2 : \ldots : o,\, n_{r-1} : 1, n_r+1 : (m,n'); \ldots;}_{p_2,q_2 : \ldots : p_{r-1} : q_{r-1} : p_r+1, q_r+1 : [p',q']; \ldots;}$$

$$\begin{matrix}(m^{(r)},n^{(r)}) \\ [p^{(r)},q^{(r)}]\end{matrix} \left[\begin{matrix}(a_{2j}; \alpha_{2j}', \alpha_{2j}'')_{1,p_2} : \ldots : (a_{(r-1)j}; \alpha_{(r-1)j}', \\ (b_{2j}; \beta_{2j}', \beta_{2j}'')_{1,q_2} : \ldots : (b_{(r-1)j}; \beta_{(r-1)j}',\end{matrix}\right.$$

$$\ldots, \alpha_{(r-1)j}^{(r-1)})_{1,p_{r-1}} : (\sigma-\rho; \mu_1, \ldots, \mu_r), (a_{rj}; \alpha_{rj}', \ldots, \alpha_{rj}^{(r)})_{1,p_r}$$

$$\ldots, \beta_{(r-1)j}^{(r-1)})_{1,q_{r-1}} : (\sigma-\rho+k; \mu_1, \ldots, \mu_r), (b_{rj}; \beta_{rj}', \ldots, \beta_{rj}^{(r)})_{1,q_r}$$

$$\left.\left.\begin{matrix}: (a_j', \alpha_j')_{1,p'}; \ldots; (a_j^{(r)}, \alpha_j^{(r)})_{1,p^{(r)}} \\ : (b_j', \beta_j')_{1,q'}; \ldots; (b_j^{(r)}, \beta_j^{(r)})_{1,q^{(r)}}\end{matrix}\right| c_1, \ldots, c_r \right], \quad (2.3)$$

बशर्ते कि

$$Re\,(\rho+1+\sum_{j=1}^{r} \mu_j\, a_j)>0,\ |\arg c_j|<\tfrac{1}{2}U_j\,\pi,\ U_j>0,\ j=1,\ldots,r,$$

हाँ U_j तथा a_j (2.2) के ही जैसे हैं।

उपपत्ति

(2.1) को सिद्ध करने के लिये हम बहुचरीय *I*-फलन को उसके कंटूर रूप में लिखते हैं और उसके समाकलन-क्रम को बदल देते हैं जो कि दिये गये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत विहित है। (2.1) का वाम पक्ष निम्न रूप में समानीत हो जाता है।

$$\frac{1}{(2\pi w)^r} \int_{L_1} \cdots \int_{L_r} \phi_1(s_1) \ldots \phi_r(s_r)\, \psi(s_1, \ldots s_r)\, x_1^{s_1} \ldots$$

$$\ldots x_r^{s_r} \left\{ \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{u+\sum_{j=1}^{r} h_j s_j - 1} (\cos x)^{v-1}\, e^{i(u+v+\sum_{j=1}^{r} h_j s)\, x}\, dx \right\} ds_1 \ldots ds_r. \quad (2.4)$$

(2.4) के आन्तरिक समाकल का मान परिणाम [6, p. 73, Eq. (2.3)] की सहायता से निकालने पर अर्थात्

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{u-1} (\cos x)^{v-1} e^{i(u+v)x}\, dx = \frac{\Gamma(u)\, \Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}\, e^{iu\pi/2} \tag{2.5}$$

(2.4) समानीत होता है निम्नलिखित में

$$\frac{1}{(2\pi w)^r} \int_{L_1} \cdots \int_{L_r} \phi_1 (s_1) \ldots \phi_r (s_r)\, \psi (s_1, \ldots, s_r)\, x_1^{s_1} \ldots x_r^{s_r}$$

$$\frac{\Gamma(v)\, \Gamma(u+\sum_{j=1}^{r} h_j s_j)}{\Gamma(u+v+\sum_{j=1}^{r}} e^{\, i\, (u+\sum_{j=1}^{r} h_j s_j)\pi/2}\; ds_1 \ldots ds_r$$

$Re\,(u)>0$, $Re\,(v)>0$.

न्में (2.1) का दक्षिण पक्ष प्राप्त होता है जैसा कि ऊपर कथित है।

(2.2) की उपपत्ति (2.1) की उपपत्ति के ही समान है।

(2.3) को सिद्ध करने के लिये हम (2.3) के वामपक्ष में बहुचरीय I-फलन को इसके कंटूर रूप में लिखते हैं और समाकलन के क्रम को बदल देते हैं जो दिये हुये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत बिहित है। तब (2.3) का वाम पक्ष निम्न रूप में समानीत हो जाता है

$$\frac{1}{(2\pi w)^r} \int_{L_1} \cdots \int_{L_r} \phi_1 (s_1) \ldots \phi_r (s_r)\, \psi (s_i, \ldots s_r)\, c_1^{s_1} \ldots$$

$$\ldots c_r^{s_r} \left\{ \int_0^{\infty} x^{\rho+\sum_{j=1}^{r} \mu_j s_j}\; e^{-x} L_k^{(\sigma)}(x)\, dx \right\} ds_1 \ldots ds_r. \tag{2.6}$$

अब ज्ञात परिणाम [4, p. 292, Eq. (1)]

$$\int_0^{\infty} x^{\beta-1} e^{-x} L_n^{(\sigma)} (x)\, dx = \frac{\Gamma(\sigma-\beta+n+1)\, \Gamma(\beta)}{u!\, \Gamma(\sigma-\beta+1)} ,$$

$Re\,(\beta)>0$, की सहायता से (2.6) के आन्तरिक समाकल का मान ज्ञात करने पर हमें (2.3) का दक्षिण पक्ष प्राप्त होता है।

3. प्रसार सूत्र

इस अनुभाग में बहुचरीय I-फलन के लिये हम लागेर बहुपद की श्रेणी में प्रसार सूत्र की स्थापना करेंगे । प्रसार सूत्र इस प्रकार है

$$x^{\rho} I [c_1 x^{\mu_1},\ldots,c_r x^{\mu_r}]$$

$$=\frac{1}{\Gamma(k+\sigma+1)} \sum_{N=0}^{\infty} I^{o,n_2 : \ldots : o,n_{(r-1)} ; 1,n_r+1 :}_{p_2,q_2 : \ldots : p_{(r-1)},q_{(r-1)} : p_r+2,q_r+1 :}$$

$$(m',n'); \ldots: (m^{(r)},n^{(r)}) \left[\begin{array}{l} (b_{2j}; \alpha'_{2j}, \alpha''_{2j})_{1,p_2} : \\ (b_{2j}; \beta'_{2j}, \beta''_{2j})_{1,q_2} : \end{array} \right.$$
$$[p',q']; \ldots; [p^{(r)},q^{(r)}]$$

$$\ldots : (a_{(r-1)j}; \alpha'_{(r-1)j}, \ldots, \alpha^{(r-1)}_{(r-1)j})_{1,p_{(r-)}} i$$

$$\ldots ; (b_{(r-1)j}; \beta'_{(r-1)j}, \ldots, \beta^{(r)}_{(r-1)j})_{1,q_{(r-1)}} :$$

$$(-\rho-\sigma; \mu_1,\ldots,\mu_r), (a_{rj}; \alpha'_{rj}, \ldots, \alpha^{(r)}_{rj})_{1,p_r} (-\rho; \mu_2,\ldots,\mu_r):$$

$$(k-\rho; \mu_1,\ldots,\mu_s), (b_{rj}; \beta'_{rj}, \ldots, \beta^{(r)}_{j})_{1,q_r} :$$

$$\left. \begin{array}{l} (a'_j, \alpha'_j)_{1,p'} ; \ldots; (a^{(r)}_j, \alpha^{(r)}_j)_{1,p^{(r)}} \\ (b'_j, \beta'_j)_{1,q'} ; \ldots, (b^{(r)}_j, \beta^{(r)}_j)_{1,q^{(r)}} \end{array} \right| c_1,\ldots,c_r \Bigg] L_N^{(\sigma)}(x), \tag{3.1}$$

बशर्ते कि

$$\mu_j>0,\ Re\ (\rho+1+\sum_{j=1}^{r} \mu_j\ a_j)>0,\ <\tfrac{1}{2}U_j,\ \pi,\ U_j>0,\ j=1,\ \ldots,\ r,$$

जहाँ U_j तथा α_j को क्रमशः (1.5) एवं (1.6) समीकरणों द्वारा व्यक्त किया जाता है ।

उपपत्ति

(3.1) को सिद्ध करने के लिये हम मान लेंगे कि

$$f(x)=x^{\rho}\ I\ [c_1x^{\mu_1},\ldots,c_rx^{\mu_r}]= \sum_{N=0}^{\infty} C_N\ L_N^{(\sigma)}(x),\ x>0, \tag{3.2}$$

जहाँ

$$L_N^{(\sigma)}(x)=\frac{(1+\sigma)_N}{N!}\,{}_1F_1\left[\begin{matrix}-N;\\1+\sigma\end{matrix}\,x\right]$$

लागेर बहुपद है। समीकरण (3.2) विहित है क्योंकि $f(x)$ संतत है और विवृत अन्तराल $(0,\infty)$ में बद्ध विचरण वाला है। हम समीकरण (3.2) के दोनों पक्षों को $x^\sigma e^{-x} L_k^{(\sigma)}(x)$ से गुणा करते हैं और 0 से ∞ सीमाओं के अन्तर्गत x के प्रति समाकलित करने पर पाते हैं कि

$$\int_0^\infty e^{-x}\,x^{\rho+\sigma}\,L_k^{(\sigma)}(x)\,I\,[c_1\,(x^{\mu_r})]$$

$$=\sum_{N=0}^{\infty} C_N\int_0^\infty x^\sigma\,e^{-x}\,L_k^{(\sigma)}(x)\,L_N^{(\sigma)}(x)\,dx, \tag{3.3}$$

लागेर बहुपदों के लाम्बिक गुण तथा परिणाम [4, p. 292, Eq. (2)] अर्थात्

$$\int_0^\infty x^\alpha\,e^{-x}\,L_n^{(\alpha)}(x)\,L_k^{(\alpha)}(x)\,dx=o,\ n\neq k,$$

तथा

$$\int_0^\infty x^\alpha\,e^{-x}\left[L_n^{(\alpha)}(x)\right]^2 dx=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!},\ n=k,\ Re\,(\alpha)>0$$

का उपयोग करने पर एवं (2.3) की सहायता से समाकल (3.3) के वाम पक्ष का मान निकालने पर पाते हैं कि

$$C_k=\frac{1}{\Gamma(k+\sigma+1)}\,I^{o,n_2\,:\,\ldots\,:\,o,n_{(r-1)}\,:\,1,a_r+1\,:\,(m',n');\,\ldots;\,m^{(r)},n^{(r)})}_{p_2,q_2\,:\,\ldots\,:\,p_{(r-1)},\,q_{(r-1)}\,:\,p_r+2,q_r+1\,:\,[p',q'];\,\ldots;\,[p^{(r)},q^{(r)}]}\left[\begin{matrix}(a_{2j};\alpha'_{2j},\alpha''_{2j})_{1,p_2}:\ldots:(a_{(r-1)j};\alpha'_{(r-1)j},\ldots,\\(b_{2j};\beta'_{2j},\beta''_{2j})_{1,q_2}:\ldots:(b_{(r-1)j};\beta'_{(r-1)j},\ldots,\end{matrix}\right.$$

$$\begin{matrix}\alpha^{(r-1)}_{(r-1)j})_{1,p_{r-1}}:(-\rho-\sigma;\mu_1,\ldots,\mu_r),(a_{rj};\alpha'_{rj},\ldots,\alpha^{(r)}_{rj})_{1,p_r},\\\beta^{(r-1)}_{(r-1)j})_{1,q_{r-1}}:(k-\rho;\mu_1,\ldots,\mu_r),(b_{rj};\beta'_{rj},\ldots,\beta^{(r)}_{rj})_{1,q_r},\end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix}(-\rho;\mu_1,\ldots,\mu_r):(a'_j,\alpha'_j)_{1,p'};\ldots,(a^{(r)}_j,\alpha^{(r)}_j)_{1,p^{(r)}}\\(b'_j,\beta'_j)_{1,q'};\ldots;(b^{(r)}_j,\beta^{(r)}_j)_{1,q^{(r)}}\end{matrix}\right|\,c_1,\ldots c_s\right] \tag{3.4}$$

अन्त में, (3.2) में परिणाम (3.4) का उपयोग करने पर हमें उपर्युक्त प्रसार सूत्र (3.1) प्राप्त होता है।

विशिष्ट दशा

(3.1) में $n_3=n_4= \dots =n_r=p_3=p_4= \dots =p_r=o=q_3=q_4= \dots =q_r$, $r=2$ और

$$(a_j')_{1,p'}=(a_j'')_{1,''}=1=(\beta_j')_{1,q'}=(\beta_j'')_{1,q''}=(a_{j2}')_{1,p_2}$$

$$=(a_{2j}'))_{1,p_2}=(\beta_{2j}')_{1,q_2}=(\beta_{2j}'')_{1,q_2}$$

लेने पर बहुचर I-फलन दो चरों वाले G-फलन में समानीत हो जाता है और हमें हाल ही में शर्मा[2] द्वारा प्राप्त परिणाम उपलब्ध हो जाता है।

निर्देश

1. प्रसाद, वाई० एन०, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1986, **29**(4), 231-235.
2. शर्मा, सी० के०, **वही**, 1977, **20**(30), 253-262.
3. प्रसाद, वाई० एन० तथा सिंह, वी० पी०, **प्रोसी० मैथ० सोसा०**, बी० एच० यू०, 1987,3 169-176.
4. एर्डेल्यी, ए०, Table of Integral Transforms, भाग II, मैकग्राहिल, न्यूयार्क; 1954, 284 (3).
5. ब्राक्समा, बी० एल० जे०, Compos. Math., 1962, **15**, 239-341.
6. हॉन, डी० बी० डी० ई०, Nourelles D'integrals defines. हैफ्नर पब्लिशिंग कम्पनी, न्यूयार्क, 1957.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 31, No. 4, 1988

फाक्स के H-फलन वाले कतिपय समाकल

सुनील औदीच्य

गणित विभाग, एल० बी० एम० कालेज, तिलक नगर, जयपुर

[प्राप्त—अप्रैल 16, 1986]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में लीगेण्ड्र फलनों तथा फाक्स के H-फलनों के कतिपय गुणनफलों वाले छह समाकलों का मूल्यांकन किया गया है।

Abstract

Some integrals involving fox's ***H*****-function.** *By* Sunil Audich, Department of Mathematics, L. B. S. College, Tilak Nagar, Jaipur :

In this paper we evaluate six integrals involving certain products of Legendre functions and Fox's H-functions. Since the H-function is quite general in nature, our results yield various (known or new) interesting integrals on specializing various parameters of the H-function.

1. फाक्स[3] द्वारा प्रवर्तित H-फलन को निम्न प्रकार अंकित तथा परिभाषित किया जावेगा

$$H_{p,q}^{m,n}\left[x\left|\begin{matrix}(a_1, \alpha_1), \ldots, (a_p, \alpha_p)\\(b_1, \beta_1), \ldots, (b_q, \beta_q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod\limits_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j s)\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j s)}{\prod\limits_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j s)\prod\limits_{j=n+1}^{q}\Gamma(a_j-\alpha_j s)}\, x^s\, dx \tag{1.1}$$

जहाँ रिक्त गुणनफल के इकाई मान लिया गया है। $0\leqslant m\leqslant q; 0\leqslant n\leqslant p; \alpha_j\ (j=1, \ldots, p)$ तथा $\beta_j\ (j=1, \ldots, q)$ सभी धन संख्यायें हैं किन्तु (1.1) द्वारा दी गई H-फलन की परिभाषा तब भी

सार्थक होगी यदि ये सारी मात्रायें शून्य हों। L मेलिन-बार्नीज प्रकार का ऐसा कंटूर है कि $\Gamma(b_h-\beta_h s)$ $(h=1, \ldots, m)$ के पोल कंटूर के दाईं ओर रहते हैं और $\Gamma(1-a_i+\alpha_i s)$, $(i=1, \ldots, n)$ के पोल कंटूर के बाईं ओर।

ब्राक्समा[1] ने H-फलन के उपगामी प्रसारों तथा वैश्लेषिक सातत्यों की व्याख्या की है।

मुख्य समाकलों का मूल्यांकन करते समय निम्नलिखित परिणामों की आवश्यकता होगी [6, p. 133, Eq. 9 (1); p. 133, Eq. 9 (4); p. 135, Eq. 13 (1); p. 240, Eq. 23 (1); p. 242, Eq. 28 (1); p. 243, Eq. 29 (1).

$$\int_0^\infty x^{\rho-1}\,(1+\sqrt{(1+x)})^{\nu}\,(1+x)^{-1/2}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\begin{bmatrix}\rho,\ (1-\nu)/2-\rho,\ 1-\nu/2-\rho\\ 1-\nu-\rho\end{bmatrix} \tag{1.2}$$

जहाँ $\qquad 0\leqslant Re\,\rho<\frac{1}{2}\,)1-Re\,\nu)$

$$\int_0^\infty x^{\rho-1}\,(\sqrt{x}+\sqrt{(1+x)})^{\nu}\,(1+x)^{-1/2})\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\begin{bmatrix}\rho,\ \rho+1/2,\ (1-\nu)/2-\rho\\ (1-\nu)/2+\rho\end{bmatrix} \tag{1.3}$$

जहाँ $\qquad 0<Re\,\rho<1/2\,(1-Re\,\nu)$,

$$\int_0^\infty x^{\rho-1}\left\{\sqrt{(1+\sqrt{(1-x)})}\,(1-x)^{-1/2}\,H(1-x)+\sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{(x-1)})}\right.$$

$$\left.(x-1)^{-1/2}\,H(x-1)\right\}\,dx$$

$$=\sqrt{((2\,\pi))}\,\Gamma\begin{bmatrix}\rho,\ 1/4-\rho\\ \rho+1/4,\ 1/2-\rho\end{bmatrix} \tag{1.4}$$

जहाँ $\qquad 0<Re\,\rho<1/4.$

जहाँ (Hx) सूचक है हीवसाइड के इकाई फलन का—

$$\int_0^\infty x^{\rho-1}\,(1+x)^{\nu/2}\,P_\nu^\mu\left\{(2+x)\,(2\sqrt{(1+x)})^{-1}\right\}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\mu-\nu)}\,\Gamma\begin{bmatrix}\rho-\mu,\ -\nu-\rho,\ 1/2-\rho\\ 1-\mu-\rho\end{bmatrix} \tag{1.5}$$

जहाँ $P_\nu^\mu(x)$ सहचारी लीगेण्ड्र फलन [2, p. 148, Eq. (2)] का सूचक है तथा

$$Re(\mu)>0,\ Re(\rho)>Re(\mu),\ Re(\rho)<\left\{\frac{1}{2},\ -Re(\nu)\right\}$$

$$\int_0^\infty x^{\rho-1}\left[P_\nu^\mu(\sqrt{(1+x)})\right]^2 dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1+\nu-\mu)\,\Gamma(-\nu-\mu)}\,\Gamma\begin{bmatrix}\rho-\mu,\ 1+\nu-\rho,\ 1/2-\rho,\ -\nu-\rho\\ 1-\rho,\ 1-\mu-\rho\end{bmatrix} \tag{1.6}$$

जहाँ $Re(\mu)>0$, $Re(\rho)<1/2$, $Re(\rho)<-Re(\nu)$ तथा $Re(\rho)<Re(\nu)+1$.

$$\int_0^\infty x^{\rho-1}\left\{P_\nu^\mu(\sqrt{(1+x)})\ P_{-\mu}^\mu(\sqrt{(1+x)})\right\}(1+x)^{-1/2}\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi^{3/2}\sqrt{2}(1+\nu-\mu)\,\Gamma(1-\nu-\mu)}\,\Gamma\begin{bmatrix}\rho-\mu,\ 1/2-\rho,\ 1+\nu-\rho,\ 1-\nu-\rho\\ 1-\rho,\ 1-\mu-\rho\end{bmatrix} \tag{1.7}$$

जहाँ

$$Re(\mu)>0,\ Re(\rho)>Re(\mu),\ Re(\rho)>\left\{\frac{1}{2},\ 1\pm Re(\nu)\right\}.$$

2. मुख्य समाकल

इस प्रपत्र में निम्नलिखित समाकलों का मूल्यांकन किया जावेगा–

$$\int_0^\infty x^{\rho-1}\,(1+\sqrt{(1+x)})^\nu\,(1+x)^{-1/2}$$

$$H\begin{bmatrix}m,n\\ p,q\end{bmatrix}\left[zx^\sigma\,(1+\sqrt{(1+x)})^\lambda \,\middle|\, \begin{matrix}(a_j,\ \alpha_j)_{1,p}\\ (b_j,\ \beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right]dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,H_{p+2,q+2}^{m+2,n+1}$$

$$\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}(1-\rho,\ \sigma),\ (a_j,\ \alpha_j)_{1,p}\ (1-\nu-\rho,\ \lambda+\sigma)\\ ((1-\nu)/2-\rho,\ \lambda/2+\sigma),\ (1-\nu/2-\rho,\ \lambda/2+\sigma),\ (d_j,\ \beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right] \tag{2.1}$$

बशर्ते कि

(i) $A>0,\ |\arg z|<\frac{1}{2}A\pi$

जहाँ

$$A=\sum_{j-1}^{n}\alpha j-\sum_{j=n+1}^{p}\alpha j+\sum_{j=1}^{m}\beta j-\sum_{j=m+1}^{q}\beta j \tag{2.2}$$

$\sigma, \lambda \geqslant 0$ (दोनों एक साथ शून्य नहीं।)

(ii) $Re(\rho)+\sigma \min_{i \leqslant j \leqslant m} Re\left(\frac{b_j}{\beta_j}\right) > 0,$

(iii) $Re\left(\rho+\frac{\nu}{2}\right)+\left(\sigma+\frac{\lambda}{2}\right) \max_{i \leqslant j \leqslant n} Re\left(\frac{a_j-1}{a_j}\right) < 1/2$

$$\int_0^\infty x^{\rho-1} (\sqrt{x}+\sqrt{(1+x)})^\nu (1+x)^{-1/2}$$

$$H_{p,q}^{m,n}\left[zx^\sigma(\sqrt{x}+\sqrt{(1+x)})^\lambda \,\middle|\, \begin{matrix}(a_j, \alpha_j)_{1,p}\\(b_j, \beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right] dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}} H_{p+2,q+2}^{m+1,n+2}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix}(1-\rho, \sigma), (1/2-\rho, \sigma), (a, \alpha_j)_{1,p}\\((1-\nu)/2-\rho, \lambda/2+\sigma), (b_j, \beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right.$$

$$\left.((1+\nu)/2-\rho, \sigma-\lambda/2)\right] \quad (2.3)$$

बशर्ते कि

(i) $A>0, |\arg z| < \frac{1}{2} A\pi$

जहाँ A की परिभाषा (2.2) जैसी है, σ तथा λ ऐसी अनृण वास्तविक संख्यायें हैं (दोनों एक साथ शून्य नहीं है) जिससे कि $\sigma-\lambda/2>0$

(ii) $Re(\rho)+\min_{l \leqslant j \leqslant m} Re\left(\frac{b_j}{\beta_j}\right)>0$

(iii) $Re\left(\rho+\frac{\nu}{2}\right)+\left(\sigma+\frac{\lambda}{2}\right) \max_{l \leqslant j \leqslant n} Re\left(\frac{a_j-1}{a_j}\right)< 1/2.$

$$\int_0^\infty x^{\rho-1} \left\{\sqrt{(1+\sqrt{(1-x)})}(1-x)^{-1/2}\right.$$

$$\left.H(1-x)+\sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{(x-1)})}\,(x-1)^{-1/2} H(x-1)\right\}$$

$$H_{p,q}^{m,n}\left[zx^\sigma \,\middle|\, \begin{matrix}(a_j, \alpha_j)_{1,p}\\(b_j, \beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right] dx$$

$$=\sqrt{2\pi}\, H_{p+2,q+2}^{m+1,n+1}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix}(1-\rho, \sigma), (a_j, \alpha_j)_{1,p}, (1/2-\rho, \sigma)\\(1/4-\rho, \sigma), (b_j, \beta_j)_{1,q}, (3/4-\rho, \sigma)\end{matrix}\right] \quad (2.4)$$

बशर्ते कि

$$\sigma>0,\ A>0,\ |\arg z|<\frac{1}{2}A\pi$$

$$Re(\rho)+\sigma \min_{l\leqslant j\leqslant m} Re\left(\frac{b_j}{\beta_j}\right)>0,$$

तथा

$$Re(\rho)+\quad \max_{l\leqslant j\leqslant n} Re\left(\frac{(a_j-1)}{\alpha_j}\right)-1/4<0$$

$$\int_0^\infty x^{\rho-1}(1+x)^{\nu/2} P_\nu^\mu\left(\frac{2+x}{2\sqrt{(1+x)}}\right) H_{p,q}^{m,n}\left[zx^\sigma \,\middle|\, \begin{matrix}(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right]dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(\pi)}\,\Gamma(-\mu-\nu)} H_{p+2,q+2}^{m+2,n+1}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}(1-\rho+\mu,\sigma),(a_j,\alpha_j)_{1,p},(1-\mu-\rho,\sigma)\\(-\nu-\rho),(1/2-\rho,\sigma),(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right] \quad (2.5)$$

बशर्ते कि

$$A-2\sigma>0,\ |\arg z|<\frac{1}{2}(A-2\sigma)\pi,$$

$$Re(\mu)>0,\ Re(\rho)+\sigma \min_{l\leqslant j\leqslant m} Re\left(\frac{b_j}{\beta_j}\right)>Re(\mu)$$

तथा

$$Re(\rho)+\sigma \max_{l\leqslant j\leqslant n} Re\left[\frac{(a_j-1)}{\alpha_j}\right]<\left\{-Re(\nu),\ 1/2\right\}$$

$$\int_0^\infty x^{\rho-1}\left[P_\nu^\mu(\sqrt{(1+x)})\right]^2 H_{p,q}^{m,n}\left[zx^\sigma\,\middle|\,\begin{matrix}(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\b_j,\beta_j(_{1,q}\end{matrix}\right]dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1+\nu-\mu)\,\Gamma(-\nu-\mu)} H_{p+3,q+3}^{m+3,n+1}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}(1-\rho+\mu,\sigma),\\(1-\rho+\nu,\sigma),\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}(a_j,\alpha_j)_{1,p},(1-\rho,\sigma),(1-\mu-\rho,\sigma)\\(1/2-\rho,\sigma),(-\nu-\rho,\sigma),(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right] \quad (2.6)$$

बशर्ते कि

$$\sigma>0,\ A>0,\ |\arg z|<\frac{1}{2}A\pi,\ Re(\mu)>0,$$

$$Re(\rho)+\sigma \min_{l\leqslant j\leqslant m} Re\left(\frac{b_j}{\beta_j}\right)>Re(\mu);\ Re(\rho)+\sigma \max_{l\leqslant j\leqslant n}$$

$$Re\left\{\frac{(a_j-1)}{a_j}\right\} < \left\{ -Re(\nu),\ Re(\nu+1),\ \frac{1}{2}\right\}$$

$$\int_0^\infty x^{\rho-1} P_\nu^\mu(\sqrt{(1+x)})\ P_{-\nu}^\mu(\sqrt{(1+x)})\ H_{p,q}^{m,n}\left[zx^\sigma \left| \begin{matrix} a_j, \alpha_j)_{1,p} \\ b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix}\right.\right] dx$$

$$= \frac{1}{\pi^{3/2}\sqrt{2}\Gamma(1+\nu-\mu)\Gamma(1-\nu-\mu)}.$$

$$H_{p+3,q+3}^{m+3,n+1}\left[z \left| \begin{matrix} (1-\rho+\mu,\sigma), (a_j,\alpha_j)_{1,p}, (1-\rho,\sigma), (1-\mu-\rho,\sigma) \\ (1/2-\rho,\sigma), (1+\nu-\rho,\sigma), (b_j,\beta_j)_{1,q} \end{matrix}\right.\right] \quad (2.7)$$

बशर्ते कि

$$A>0,\ |\arg z| < \frac{1}{2} A\pi,\ \sigma>0$$

$$Re(\mu)<0,\ Re(\rho)+\min_{1\leqslant j\leqslant m} Re\left(\frac{b_j}{\beta_j}\right) > Re(\mu)$$

$$Re(\rho)+\max_{1\leqslant j\leqslant n} Re\left\{\frac{(a_j-1)}{\alpha_j}\right\} < \left\{\frac{1}{2},\ 1\pm Re(\nu)\right\}$$

समाकल (2,1) की उपपत्ति

(2.1) का मूल्यांकन करने के लिये इसके वाम पक्ष में आये H-फलन को (1.1) की सहायता से मेलिन-बार्नीज प्रकार के समाकल के रूप में व्यक्त करते हैं और तब समाकलन का क्रम बदल देते हैं तो हमें (2.1) का वाम पक्ष (मान लें Δ) प्राप्त होता है।

$$\Delta = \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\left\{ \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j\xi)\prod_{j=1}^{n}(1-a_j+\alpha_j\xi)}{\prod_{m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j\xi)\prod_{n+1}^{p}\Gamma(a_j-\alpha_j\xi)} z^{\xi}. \right.\right.$$

$$\left.\left. \int_0^x x^{\rho+\sigma\xi-1}(1+\sqrt{(1+x)})^{\nu+\lambda\xi}(1+x)^{-1/2} \right\} dx \right] d\xi$$

अब x-समाकल का मूल्यांकन करने के लिये (1.2) को प्रयुक्त करने पर हमें परिणाम (2.1) प्राप्त होता है।

इसी तरह से (1.3) से लेकर (1.7) तक के परिणामों को सम्प्रयुक्त करके क्रमशः (2.3) से (2.7) तक के समाकल स्थापित किये जा सकते हैं।

3. विशिष्ट दशायें

पाठकगण मथाई तथा सक्सेना[5] एवं श्रीवास्तव, गुप्ता तथा गोयल[7] की पुस्तकों में दिये गये परिणामों को देखें। हम समाकल (2.1) की कुछ विशिष्ट दशायें दृष्टान्त रूप में देते हुये अन्यों को पाठकों पर छोड देते हैं।

(i) यदि (2.1) में $a_j=\beta_j=1$ रखा जाय तो उसमें निहित H-फलन समानीत हो जाता है G-फलन में और हमें निम्नलिखित समाकल प्राप्त होता है

$$\int_0^\infty x^{\rho-1}\,(1+\sqrt{(1+x)})^\nu\,(1+x)^{-1/2}\,G_{p,q}^{m,n}\left[zx^\sigma\,(1+\sqrt{(1+x)})^\lambda \,\middle|\, \begin{matrix}(a_p)\\(b_q)\end{matrix}\right] dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,H_{p+2,q+2}^{m+2,n+1}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix}(1-\rho,\,\sigma),\,(a_j,\,1)_{1,p}(1-\nu-\rho,\,\lambda+\sigma)\\((1-\nu)/2-\rho,\,\lambda/2+\sigma),\,(1-\nu/2-\rho,\,\lambda/2+\sigma),\,(b_j,1)_{1,q}\end{matrix}\right] \tag{3.1}$$

(ii) और भी, (3.1) में $\lambda=0,\ \sigma=1,\ n=0,\ p=1 m=q=2,\ a_1=1-k,\ b_1=\frac{1}{2}+r,$ $b_2=\frac{1}{2}-r$

रखने पर तथा ज्ञात परिणाम का उपयोग करने पर थोड़े से सरलीकरण के पश्चात् निम्नलिखित रोचक समाकल प्राप्त होता है

$$\int_0^\infty x^{\rho-1}\,(1+\sqrt{(1+x)})^\nu\,(1+x)^{-1/2}\,\exp\left(-\frac{zx}{2}\right)\,W_{k,r}\,(zx)\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,G_{3,4}^{4,2}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix}1-\rho,\,1-k,\,1-\nu-\rho\\(1-\nu)/2-\rho,\,1-\nu/2-\rho,\,1/2+r,\,1/2-r\end{matrix}\right] \tag{3.2}$$

जहाँ $w_{k,r}(x)$ विख्यात व्हिटेकर फलन है।

(iii) अन्त में, (3.1) में $\lambda=0,\ \sigma=1,\ n=p=0,\ m=q=1\ b_1=0$ रखने पर हमें निम्न-लिखित समाकल प्राप्त होता है।

$$\int_0^\infty x^{\rho-1}\,(1+\sqrt{(1-x)})^\nu\,(1+x)^{-1/2}\,\exp-(zx)\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,G_{2,3}^{3,1}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix}1-\rho,\,1-\nu-\rho\\(1-\nu)/2-\rho,\,1-\nu/2-\rho\end{matrix}\right]$$

जिन प्रतिबन्धों के अन्तर्गत उपर्युक्त समाकल (3.1)-(3.3) वैध हैं उन्हें मुख्य समाकल (2.1) से सहज ही प्राप्त किया जा सकता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डॉ० एस० पी० गोयल का आभारी है जिन्होंने इस प्रपत्र की तैयारी में मार्ग-दर्शन किया।

निर्देश

1. ब्रक्समा, बी० ए० जे०, Compos. Math. 1963, **15**, 239-341.
2. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Higher Transcendental Functions, भाग I, मैकग्राहिल न्यूयार्क, 1953.
3. फाक्स, सी०, Amer. Math. Soc, 1961, **98**, 395-429.
4. गुप्ता, के० सी० तथा जैन, यू० सी०, प्रोसी० नेशनल एके०, 1966, **36A**, 594-601.
5. मथाई, ए० तथा सक्सेना, आर० के०, The *H*-function with Applications in Statistics and other Disciplines, विलेईस्टर्न, नई दिल्ली 1978.
6. मैरिचेव, ओ० ई०, Metod Wichisleniya integral ov ot spetsialnikh Funktsi, Minsk Nayuka itekhnika, 1978.
7. श्रीवास्तव, एच० एम०, गुप्ता, के० सी० तथा गोयल, एस० पी०, The *H*-function of one and two variables with applications, साउथ एशियग पब्लिशर्स, नई दिल्ली तथा मद्रास 1982.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 31, No. 4, 1988

होलोमार्फिकत: अर्द्धसंमित संबंधन की वक्रता II

बी० बी० सिनहा तथा आर० एन० सिंह*
गणित विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी
*गवर्नमेंट इनजिनियरिंग कालेज, रीवां (म० प्र०)

[प्राप्त—अगस्त 29, 1987]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में हाइपरबोली काह्लर दूरीक में होलोमार्फिकत: अर्ध संमित सम्बन्धन की वक्रता सम्बन्धी कतिपय वक्रता तत्समकों का अध्ययन किया गया है।

Abstract

On curvature of holomorphically semi-symmetric connexion. II. *By* B. B. Sinha, Department of Mathematics, Banaras Hindu University, Varanasi and R. N. Singh, Government Engineering College, Rewa (M. P.).

In the present paper we have studied some curvature identities on the curvature of a holomorphically semi symmetric connexion in hyperbolic Kahler space.

1. एक n-विमीय अवकलनीय बहुमुख (differentiable manifold) हाइपरबोली काह्लर बहुमुख कहलाता है यदि M_n में (1.1) प्रकार का एक प्रदिश क्षेत्र (tensor field) तथा एक छद्म रीमानियन दूरीक (metric) G निम्नलिखित प्रतिबन्धों की तुष्टि करते हैं[2]

(a) $\bar{\bar{X}}=X$ जहाँ $\bar{X}=FX$

(b) $G(\bar{X}, \bar{Y})=-G(X, Y)$

तथा (c) $(D_X F)Y=0.$ (1.1)

माना कि K वक्रता टेंसर (प्रदिश) है हाइपरबोली काह्लर बहुमुख के प्रकार (1,3) का। तब

(a) $K(\bar{X}, X, Z)=-K(X, \bar{Y}, Z),$

(b) $$\overline{K(X, Y, X)}=K(X, Y, \bar{Z}),$$

(c) $$K(X, Y, Z)=-K(Y, X, Z). \quad (1.2)$$

माना कि $'K$ (0, 4) प्रकार का वक्रता टेंसर है जिसे

$$'K(X, Y, Z, T)=G(K(X, Y, Z), T). \quad (1.3)$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है। तब

$$'K(X, Y, Z, T)=-'K(X, Y, \bar{Z}, \bar{T}.) \quad (1.4)$$

यदि Ric M_n का रिक्की टेंसर हो, तब

$$\text{Ric}(X, Y)=-\text{Ric}(\bar{X}, \bar{Y}). \quad (1.5)$$

बियाञ्ची का द्वितीय तत्समक

$$(D_T K)(X, Y, Z)+(D_X K)(Y, T, Z)+(D_Y K)(T, X, Z)=0. \quad (1.6)$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है। उपर्युक्त समीकरण को संकुचित करने पर

$$(\text{div}\ (K)(X, Y, Z)=(D_X\,\text{Ric})(Y, Z)-(D_Y\,\text{Ric})(X, Z). \quad (1.7)$$

किसी हाइपरबोली काह्लर बहुमुख में,

$$(D_X\,\text{Ric})(Y, \bar{Z})+(D_Y\,\text{Ric})(Z, \bar{X})+(D_Z\,\text{Ric})(X, \bar{Y})=0 \cdot \quad (1.8)$$

2. H-अर्ध संमित सम्बन्धन

प्रायः सम्मिश्र बहुमुख में सजातीय सम्बन्धन D यदि $D_X F=0$ हो तो F-सम्बन्ध कहलाता है। n-दिमीय अवकलनीय बहुमुख M_n में सम्बन्ध को अर्धसममितीय कहा जाता है यदि इसका मरोडी प्रदिश S का स्वरूप

$$S(X, Y)=p(X)Y-p(Y)X \quad (2.1)$$

जैसा है जहाँ p है 1-फार्म[3]।

बार्टोलोट्टी ने[1] अर्धसममितीय सम्बन्धन का ज्यामितीय अर्थ दिया है जो इस प्रकार है।

माना कि U तथा V दो वेक्टर $S(U, V)$ U तथा V सामान्य रूप में रैखिकतःस्वतन्त्र होते हैं। किन्तु यदि

$$S(U, V)=AU+BV, \quad (2.2)$$

प्रत्येक U तथा V के लिये जहाँ A तथा B अदिश हैं और S का फार्म (2.1) है तथा इसका विलोम भी है।

अब हम विषम सममितीय प्रदिश S पर विचार करें जो हाइपरबोली काहलेर बहुमुख में प्रतिबन्ध

$$S(U, \bar{U})=AU+B\bar{U} \tag{2.3}$$

की तुष्टि करता है। यदि S से प्रत्येक U के लिये (2.3) की तुष्टि होती है तो S को

$$S(X, Y)=p(X)Y-p(Y)X-p(\bar{X})\bar{Y}+p(\bar{Y})\bar{X} \tag{2.4}$$

के द्वारा व्यक्त किया जाता है जहाँ p 1-फार्म है। सजातीय सम्बन्धन जिसका मरोडी प्रदिश का (2.4) की तरह होता है होलोमार्फिकत:अर्धसममितीय सम्बन्धन कहलाता है। जिस हाइपरबोली काहलर बहुमुख के मरोडी प्रदिश का स्वरूप (2.4) होता है उसका सरलतम सम्बन्धन

$$E_XY=D_XY+p(X)Y-p(\bar{X})\bar{Y}, \tag{2.5}$$

है जहाँ D रीमानियन सम्बन्धन का सूचक है।[4]

3. वक्रता तत्समक

माना कि R तथा K वक्रता प्रदिश हैं तथा E तथा D सम्बन्धनों के जिन्हें समीकरण (2.5) के द्वारा परिभाषित किया जाता है तथा माना कि $R(X,Y)=(\overset{1}{C_1}R)(X, Y)$. तो हाइपरबोली काहलर बहुमुख में

$$R(X, Y, Z)+\tfrac{1}{2}\{R(X, Y)-R(Y, X)\}Z-\tfrac{1}{2}\{R(\bar{X}, Y)-R(\bar{Y}, X)\}\bar{Z}$$
$$=K(X, Y, Z)+\text{Ric}\,(X, \bar{Y})\bar{Z} \tag{3.1}$$

अब

$$H(X, Y, Z)=R(X, X, Z)+\tfrac{1}{2}(R(X, Y)-P(Y, X))Z$$
$$-\tfrac{1}{2}(R(\bar{X}, Y)-R(\bar{Y},X))\bar{Z} \tag{3.2}$$

रखें जो होलोमार्फिकत:अर्धसम्मितीय परिवर्तन का निश्चर है। H की परिभाषा होलोमार्फिकत: अर्ध सम्मितीय वक्रता प्रदिश के रूप में की जा सकती है। इस प्रकार

$$H(X, Y, Z)=K(X, Y, Z)+\text{Ric}\,(X, \bar{Y})\,\bar{Z}. \tag{3.3}$$

प्रमेय 3.1

यदि हाइपरबोली कालहर बहुमुख सपाट हो तो यह होलोमार्फिक अर्धसम्मितीय रूप से सपाट है।

उपपत्ति

यदि हाइपरबोली कालहर बहुमुख सपाट हो अर्थात् $K=0$ तो (3.3) से $H=0$ प्राप्त होगा।

प्रमेय 3.2

यदि हाइपरबोली कालहर बहुमुख पुनरावर्ती हो तो यह होलोमार्फिक अर्धसम्मितीय पुनरावर्ती होगा।

उपपत्ति

(2.3) को अवकलित करने पर

$$(D_W H)(X, Y, Z) = (D_W K)(X, Y, Z) + (D_W \text{ Ric})(X, \bar{Y})\bar{Z} \tag{3.4}$$

जहाँ D रीमानियम सम्बन्ध है। यदि काहलर बहुमुखी आवर्ती हो, अर्थात्

$$(D_W K)(X, Y, Z) = \alpha (W) K(X, Y, Z) \tag{3.5}$$

जहाँ α पुनरावर्तन 1-फार्म है। तब (3.4) में (3.3) तथा (3.5) का उपयोग करने पर

$$\{(D_W H)(X, Y, Z) - \alpha (W) H(X, Y, Z)\} - \{(D_W \text{ Ric})(X, \bar{Y}) - \alpha (W) \text{ Ric } (X, \bar{Y})\}\bar{Z} = 0. \tag{3.6}$$

इस तरह

$$(D_W H)(X, Y, Z) = \alpha (W) H(X, Y, Z)$$

क्योंकि

$$(D_W \text{ Ric})(X, \bar{Y}) = \alpha (W) \text{ Ric } (X, \bar{Y})$$

प्रमेय 3.3

यदि हाइपरबोली काहलर बहुमुख सम्मितीय हो तो इसका होलोमार्फिक अर्धसम्मितीय वक्रता प्रदिश सम्बन्ध D के प्रति सम्मितीय होता है।

उपपत्ति

(3.3) का अवकलन करने पर

$$(D_W H)(X, Y, Z) = D_W K)(X, Y, Z) + (D_W \text{ Ric})(X, \bar{Y})\bar{Z},$$

जहाँ D रीमानियम सम्वन्धन है। यदि हाइपरबोली कालहर बहुमुख सम्मितीय है अर्थात्

$$(D_W K) = 0. \tag{3.8}$$

उपर्युक्त समीकरण में इसका प्रयोग करने पर

$$D_W H = 0. \tag{3.9}$$

प्रमेय 3.4

हमें ज्ञात है

$$C_1^1 H = C_2^1 H = C_3^1 H = 0 \tag{3.10}$$

उपपत्ति

हमें ज्ञात है कि $H(X, Y, Z)=K(X, Y, Z)+\text{Ric}(X, \bar{Y})\bar{Z}$.

X के प्रति संकुचित करने पर

$$(C_1^1 H)(Y, Z)=\text{Ric}(Y, Z)+\text{Ric}(\bar{Y}, \bar{Z})=0$$

इसी प्रकार Y तथा Z के प्रति संकुचित करने पर

$$C_2^1 H=C_3^1 H=0.$$

इस तरह

$$C_1^1 H=C_2^1 H=C_3^1 H=0.$$

प्रमेय 3.5

(a) $$H(X, Y, Z)+H(Y, Z, X)+H(Z, X, Y)$$
$$=\text{Ric}(X, \bar{Y})\bar{Z}+\text{Ric}(Y, \bar{Z})\bar{X}+\text{Ric}(Z, \bar{X})\bar{Y}$$

(b) $$(D_X X)(Y, Z, W)+(D_Y H)(Z, X, W)+(D_Z H)(X, Y, W)$$
$$=\{(D_X \text{Ric})(Y, \bar{Z})+(D_Y \text{Ric})(Z, \bar{X})+(D_Z \text{Ric})(X, \bar{Y})\}\bar{W}$$

उपपत्ति

हम जानते हैं कि

$$H(X, Y, Z)=K(X, Y, Z)+\text{Ric}(X, \bar{Y})\bar{Z}.$$

अन्य दो समीकरणों को X, Y, Z के चक्रीय क्रमचयों द्वारा लिखने पर तथा उन्हें इस समीकरण में जोड़ देने पर तथा बियाश्ची के प्रथम तत्समक का प्रयोग करने पर हमें (3.11 a) प्राप्त होता है।

यही नहीं, (3.3) से हमें प्राप्त है

$$(D_X H)(Y, Z, W)=(D_X K)(Y, Z, W)+(D_X \text{Ric})(Y, \bar{Z})\bar{W}.$$

अन्य दो समीकरणों को X, Y, Z के चक्रीय क्रमचयों द्वारा लिखने पर तथा उन्हें इस समीकरण में जोड़ देने पर बियाश्ची के द्वितीय तत्समक का प्रयोग करने पर हमें (3.11 b) प्राप्त होता है।

निम्नलिखित तत्समकों को खोज निकालना आसान है :

प्रमेय 3.6

हाइपरबोली कालहर बहुमुख में

(a) $H(X, Y, Z)-\overline{H(X, Y, Z)}=0,$

(b) $H(X, Y, Z)+H(\bar{X}, \bar{Y}, Z)=0$,

(c) $H(X, Y, Z)+H(X. \bar{Y}, \bar{Z})=\text{Ric}\,(X, \bar{Y})\bar{Z}+\text{Ric}\,(X, Y)Z$,

(d) $\overline{H(X, Y, \bar{\bar{Z}})}+H(\bar{X}, \bar{Y}, Z)=0$,

(e) $H(X, Y, \bar{Z})+\overline{H(\bar{\bar{X}}, \bar{\bar{Y}}, Z)}=0$.

कृतज्ञता-ज्ञापन

एक लेखक (आर० एन० सिंह) आर्थिक सहायता प्राप्त होने के लिये सी० एस० आई० आर०, नई दिल्ली के प्रति आभार व्यक्त करता है ।

निर्देश

1. बार्टोलोट्टी, ई०, Ann. di. Mat, 1930, **VIII**, 53-101.

2. दुबे, के० के०, Analele Universitatii Din Timisoara Seria Stünte Matematices, 1973, **11**, Fasc 1, 49-54.

3. इमाइ, टी०, Tensor N. S., 1972, **24**, 239-296.

4. प्रवानोविक, एम०, Review of Research, Faculty of Science, University of Novisad, 1949, **9**, 91-99.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 31, No. 4, 1988

पूर्ण-दूरीक समष्टि में अद्वितीय स्थिर बिन्दु प्रमेय

ए० बोहारे तथा पी० एल० शर्मा

गणित तथा सांख्यिकी विभाग, सागर विश्वविद्यालय, सागर

[प्राप्त—अगस्त 8, 1987]

सारांश

पूर्ण 2-दूरीक समष्टि में तीन संतत स्वतः प्रतिरूपणों के लिये एक अद्वितीय स्थिर बिन्दु प्रमेय प्राप्त की गई है।

Abstract

A unique fixed p oint theorem in complete 2-metric space. *By* A. Bohare and P. L. Sharma, Department of Mathematics and Statistics, University of Saugor, Sagar.

A unique fixed point theorem for three continuous selfmaps in complete 2-metric space have been obtained in the present note.

गाह्लर[1] ने 2-दूरीक समष्टियों की खोज की है। 2-दूरीक समष्टि एक समष्टि X है जिसमें एक अनृण वास्तविक मान-वाला फलन d $X\times X\times X$ पर होता है और उससे निम्नलिखित प्रतिबन्धों की तुष्टि होती है

(i) a, b, c तीन बिन्दु X में इस प्रकार हैं कि $d(a, b, c)\neq 0$,

(ii) $d(x, y, z)=0$ यदि x, y, z में से कम से कम दो समान हों,

(iii) $d(x, y, z)=d(x, z, y)=d(y, z, x)$,

तथा

(iv) $d(x, y, z)\leqslant d(x, y, u)+d(x, u, z)+d(u, y, z)$.

समस्त 2-दूरीक समष्टियों में कम से कम तीन बिन्दुओं के होने की कल्पना की जावेगी। इस पूर्ण टिप्पणी में N सूचित करता है अनृण पूर्ण संख्याओं के समुच्चय को।

2-दूरीक समष्टि में अनुक्रम $\{x_n\}$ कौशी अनुक्रम कहलाता है यदि

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m, a)=0$$

X में समस्त a के लिये। अनुक्रम $\{x_n\}$ X में x तक अभिसारी है और इस अनुक्रम की सीमा x है यदि

$$\lim_{n,\theta\to\infty} d(x_n, x, a)=0$$

x में प्रत्येक a के लिये।

वह 2-दूरीक समष्टि X जिसमें प्रत्येक कौशी अनुक्रम X में एक बिन्दु पर अभिसारी होता है वह पूर्ण 2-दूरीक समष्टि कहलाता है। अब हम निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे।

प्रमेय

माना कि E, F एवं T तीन संतत स्वतः प्रतिचित्र है पूर्ण दूरीक समष्टि (X, d) में जिनसे

$$\min\{d(Ex, Fy, a), d(Ty, Fx, a)\}+a\min\{d(Tx, Fy, a), d(Ty, Ex, a)\}$$
$$\leqslant pd(Tx, Ty, a)+qd(Tx. Ex, a) \quad (1)$$

X में समस्त x, y की तुष्टि होती है तथा a, p एवं q ऐसी वास्तविक संख्यायें हैं कि

$$0<p+q<1, p<a.$$

$$ET=TE, FT=TF, E(X)\cup F(X)\subset T(X). \quad (2)$$

तो E, F एवं T का X में अद्वितीय सार्व स्थिर बिन्दु होता है।

उपपत्ति

X में x_0 चुन लें। माना कि $t=\{x_n\}$ $n\in N$ X में ऐसा अनुक्रम है कि

$$Tx_{2n+1}=Ex_{2n}, Tx_{2n+2}=Fx_{2n+1}, n\in N. \quad (3)$$

हम ऐसा कर सकते हैं क्योंकि

$$E(X)\cup F(X)\cup T(X).$$

तब (1) से $x=x_{2n}$ एवं $y=x_{2n+1}$, के लिये

$$\min\{dTx_{2n+1}, Tx_{2n+2}, a), d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+2}, a)\}$$
$$+a\min\{d(Tx_{2n}, Tx_{2n+3}, a), d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+1}, a)\}$$
$$\leqslant pd(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}, a)+qd(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}. a)$$

अर्थात् $$d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+2}, a) \leqslant hd(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}, a) \quad (4)$$

जहाँ $$h=p+q<1.$$

(4) से

$$d(Tx_{2n}, Tx_{2n+1}, a) \leqslant hd(Tx_{2n-1}, Tx_{2n}, a) \quad (5)$$

अर्थात्

$$d(Tx_{2n+1}s\ Tx_{2n+2}, a) \leqslant h^2 d(Tx_{2n-1}, Tx_{2n}, a)$$

इसी ढंग से बढ़ने पर

$$d(Tx_{2n+1}, Tx_{2n+2}, a) \leqslant h^{22n+1} d(Tx_0, Tx_1, a)$$

अत:

$$d(Tx_m, Tx_{m+1}\ a) \leqslant h^{(m+1/2)} d(Tx_0, Tx_1, a) \quad (m=1, 2, \ldots \quad (6)$$

जहाँ

$$(m+1)/2= \begin{cases} (m+1)/2 \text{ यदि } m \text{ विषम हो} \\ m/2 \text{ यदि } m \text{ सम हो} \end{cases}$$

(4) तथा (5) में $Tx_{2n \cdot a}=Tx_{2n-1}$ रखने पर हम इस निष्कर्ष पहुँचते हैं कि

$$d(Tx_n, Tx_{n+1}, Tx_{n+2})=0 \quad (7)$$

(6) तथा (7) से

$$d(Tx_0, Tx_1, Tx_m) \leqslant d(Tx_0, Tx_1, Tx_{m-1})+d(Tx_0, Tx_{m-1}, Tx_m)$$

$$+d(Tx_{m-1}, Tx_1, Tx_m)$$

$$\leqslant d(Tx_0, Tx_1, Tx_{m-1})$$

$$+h^{(m-1)/2} d(Tx_0, Tx_0, Tx_1)+d(Tx_0, Tx_1, Tx_1)$$

$$=d(Tx_0, Tx_1, Tx_{m-1}) \leqslant d(Tx_0, Tx_1, Tx_{m-2}) \leqslant \ldots$$

$$\leqslant d(Tx_0, Tx_1, Tx_1)=0$$

अत:

$$d(Tx_n, Tx_{n+1}, Tx_m)=0,$$

किसी भी n, $m \in N$ के लिये।

अतएव किसी $a \in X$ एवं $n<m$, के लिये

$$d(Tx_n, Tx_m, a) \leqslant d(Tx_n, Tx_{n+1}. a)+d(Tx_{n+1}, Tx_m, a)$$

$$+d(Tx_n, Tx_m, Tx_{n+1})$$

$$\leqslant h^{(m+1)/2} d(Tx_0, Tx_1, a)+d(Tx_{n+1}, Tx_m, a)$$

$$\leqslant (h^{(m+1)/2}+h^{(n+2)/2}) d(Tx_0, Tx_1, a)$$

$$+d(Tx_{n+2}, Tx_m, a)$$

$$\leqslant \ldots \leqslant d(Tx_0, Tx_1, a) \sum_{i=1}^{m-1} h^{(n+1)/2}$$

चूंकि $h \in (0, 1)$, अतः इससे यह निकलता है कि

$$\lim_{n,m \to \infty} d(Tx_n, Tx_m, a) = 0.$$

अतः $\{T_t\}$ कौशी अनुक्रम है और X में किसी बिन्दु x में अभिसरित होता है क्योंकि X पूर्ण है। (3) से यह निकलता है कि $\{Ex_{2n}\}$ तथा $\{Fx_{2n+1}\}$ भी z में अभिसरित होते हैं।

(2) से हमें प्राप्त होगा

$$E(Tx_{2n}) = T(Ex_{2n}), \; F(Tx_{2n+1}) = T(Fx_{2n+1})$$

समस्त $n \in N$ के लिये। यदि मानें कि n अनन्त की ओर अग्रसर होता है तो

$$Ez = Tz = Fz \tag{8}$$

अब (1) में $x = x_{2n}$ एवं $y = z$ रखने पर (8) से

$$\min \{d(Ex_{2n}, Fz, a), d(Tz, Fz, a)\}$$

$$+a \min \{d(Tx_{2n}, Fz, a), d(Tz, Ex_{2n}, a)\}$$

$$\leqslant pd(Tx_{2n}, Tz, a) + qd(Tx_{2n}, Ex_{2n}, a)$$

प्राप्त होता है और n को अनन्त की ओर अग्रसर होने देने पर

$$d(Tz, z, a) \leqslant \frac{p}{a} d(Tz, z, a)$$

यह निकलता है कि $Tz = z$, क्योंकि $p < a$,। इस तरह z एक सार्व स्थिर बिन्दु है E, F तथा T का।

z की अद्वितीयता सिद्ध करने के लिये माना कि w एक अन्य सार्व स्थिर बिन्दु है E, F तथा T का जो इसे भिन्न है। तब (1) में $x = z$ एवं $y = w$ रखने पर

$$\min \{d(Ez, Fw, a), d(Tw, Fw, a)\}$$

$$+a \min \{d(Tz, Fw, a), d(Tw, Ez, a)$$

$$\leqslant pd(Tz, Tw, a) + qd(Tz, Ez. a)$$

अर्थात

$$d(z, w, n) \leqslant \frac{p}{a} d(z, w, a)$$

इससे यह निकलता है कि $z=w$, क्योंकि $p<a$.

इस तरह प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण हुई।

निर्देश

1. गाहलर, एस०, Math. Nachr, 1963, **26**, 115-118.

2. धागे, वी० सी०, Indian J. Pure Appl, Math. 1985, **16**(3), 245-256.

3. तिवारी, बी० एम० एल० तथा सिंह, एस० एल०, Indian J. Math, 1983, **25**(2), रजत जयन्ती अंक।